WORLD BANK GROUP

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

PROIECTUL ÎNVĂȚĂMÂNTUL SUPERIOR DIN MOLDOVA

Colegiul Pedagogic „Ion Creangă” din cadrul Universității de Stat „Alecu Russo” din Bălți

DIDACTICA MATEMATICII II

Suport de curs

Bălți, 2024

Colegiul Pedagogic „Ion Creangă”
din cadrul
Universității de Stat „Alecu Russo” din Bălți

DIDACTICA MATEMATICII II

Suport de curs

Bălți, 2024

Lucrarea a fost elaborată în cadrul Subproiectului „EDUSPACE – Educația, Dezvoltarea, Umanizarea Specialiştilor Pedagogi de Azi pentru Comunitatea Eco" din cadrul Programului de Îmbunătăţire a Învăţământului Superior din Republica Moldova (PÎÎS) al Proiectului „Învăţământul Superior din Moldova" (PÎSM) finanţat de Banca Mondială, implementat de Colegiul Pedagogic ,,Ion Creangă" din cadrul Universității de Stat „Alecu Russo" din Bălţi.

Manager subproiect: Tatiana ȘOVA, doctor, conferenţiar universitar.

Lucrarea este destinată elevilor din colegii, care studiază la Specialitatea 11310 Învăţământ primar, Calificarea Învăţător

Autor:	Ludmila URSU, doctor, profesor universitar
Recenzenți:	Tatiana DUBINEANSCHI, doctor, conferenţiar universitar, Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă" din Chișinău Liubov ZASTÎNCEANU, doctor, conferenţiar universitar, Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălţi
Recomandat spre publicare:	Consiliul Facultăţii Ştiinţe ale Educaţiei, Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă" din Chișinău (proces-verbal nr. 7 din 22.03.2024)
Discutat şi aprobat:	Catedra Pedagogia Învăţământului Primar, Facultatea Ştiinţe ale Educaţiei, Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă" din Chişinău (proces-verbal nr. 8 din 18.03.2024) Consiliul Profesoral al Colegiului Pedagogic „Ion Creangă" din cadrul Universităţii de Stat „Alecu Russo" din Bălţi (proces-verbal nr. 4 din 21.05.2024) Consiliul metodico-ştiinţific al Colegiului Pedagogic „Ion Creangă" din cadrul Universităţii de Stat „Alecu Russo" din Bălţi (proces-verbal nr. 3 din 14.05.2024)

DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII DIN REPUBLICA MOLDOVA
Ursu, Ludmila.
Didactica matematicii II : Suport de curs / Ludmila Ursu ; Ministerul Educaţiei şi Cercetării al Republicii Moldova, Colegiul Pedagogic „Ion Creangă" din cadrul Universităţii de Stat „Alecu Russo" din Bălţi. – Bălţi : [S. n.], 2024 (Tipografia din Bălţi). – 129 p. : fig., tab. color.
Aut. este indicat pe verso f. de tit. – Bibliogr.: p. 115-116 (15 tit.). – Finanţat de Banca Mondială. – 200 ex.
ISBN 978-9975-161-81-7.
37.016:51(075.32)
U 85

CUPRINS

CUVÂNT-ÎNAINTE

Prezentul suport este destinat elevilor colegiilor, specialitatea „Învățământ primar”, și este elaborat în conformitate cu prevederile curriculumului pentru unitatea de curs „Didactica matematicii 2”. Pentru cadrele didactice implicate în predare, suportul va constitui un instrument de orientare metodologică a procesului educațional.

Unitatea de curs „Didactica matematicii II”, de rând cu unitatea premergătoare „Didactica matematicii I”, are ca scop formarea profesională a viitorilor învățători în vederea asigurării funcționalității sistemului educațional din Republica Moldova prin realizarea prevederilor curriculumului la matematică pentru clasele primare.

Conținutul suportului este organizat pe patru capitole, conform celor patru unități de învățare stabilite de curriculumul unității de curs. Fiecare capitol se structurează din subcapitole în care se relevă aspecte teoretico-metodologice, se oferă recomandări și sugestii metodologice concrete, exemple comentate etc.

La fine de capitole se propun sisteme de activități aplicative în grup și individuale, subiecte pentru dezbateri. Aceste activități pun accent nu pe reproducere, dar pe prelucrarea activă a materiei, pe stimularea creativității viitorilor învățători, pe dezvoltarea propriilor idei și soluții metodologice. Cadrele didactice implicate în predarea unității de curs au libertatea de a decide modalitățile de abordare a respectivelor activități la ore de seminar și laborator, în contexte de lucru individual al elevilor.

Sper că prezentul suport va servi viitorilor învățători drept reper în ghidarea micilor școlari în lumea matematicii – cu drag și grijă, cu măiestrie și competență.

Autoarea

1. METODOLOGIA PREDĂRII-ÎNVĂŢĂRII-EVALUĂRII MĂRIMILOR ŞI UNITĂŢILOR DE MĂSURĂ

1.1. Mărime. Măsurarea unei mărimi. Unităţi de măsură. Importanţa studierii mărimilor și unităților de măsură

Suntem înconjurați de obiecte sau, după cum se spune în fizică, *corpuri*. O masă, un păhar pe masă, apa din păhar – toate acestea sunt corpuri fizice. Fiecare corp are o mulțime de proprietăți. De exemplu, păharul posedă proprietățile de a avea o anumită înălțime/adâncime, de a ocupa o parte din suprafața plană a mesei, de a se umple cu o anumită cantitate de apă etc.

Schimbările care au loc în lumea din jurul nostru și pe care le putem observa sunt *fenomene fizice*. Căderea nopţii, ploaia, vântul – toate acestea sunt fenomene fizice. Fiecare fenomen este caracterizat prin variate proprietăți permanente sau temporare, care pot fi exprimate cu ajutorul numerelor. De exemplu, poate ploua timp de 30 de minute cu viteza vântului de 5 km/h. Aceste valori (5 km/h și 30 min) sunt unele dintre caracteristicile observabile și măsurabile ale vântului și ploii.

Generalizând, se poate afirma că **mărimea fizică:**

- este o proprietate fizică a unui corp, fenomen sau proces fizic care este observabilă și măsurabilă;
- are o determinare cantitativă – valoarea numerică, și una calitativă – **unitatea de măsură**;
- este exprimată ca rezultat al măsurării – ca produs între valoarea numerică și unitatea de măsură; de exemplu: 3 cm; 2 kg; 4 h etc.

A măsura o mărime înseamnă a compara această mărime cu o alta, luată ca unitate de măsură, a determina valoarea acelei mărimi în raport cu unitatea de măsură – o mărime de acelaşi fel, luată drept etalon.

Se deosebesc *unități de măsură nonstandard și standard*. Strămoșii noștri foloseau unități de măsură nonstandard; de exemplu, palma, cotul pentru măsurarea lungimilor. Aceasta genera multiple inconveniențe, deoarece la aceeași măsurare se obțineau rezultate diferite.

Prin convenţie internaţională (1960) a fost creat *Sistemul Internaținal de Unități de Măsură (SI)* care stabilește 7 unităţi de măsură fundamentale independente între ele, cu ajutorul cărora pot fi definite toate celelalte unităţi de măsură numite unităţi de măsură derivate (tabelul 1.1.).

Tabelul 1.1. Unități de măsură fundamentale

Mărimea fizică	Unitatea de măsură	
	Denumire	Simbol
Lungimea	metru	m
Masa	kilogram	kg
Timpul	secundă	s
Intensitatea curentului electric	amper	A
Temperatura termodinamică	kelvin	K
Cantitatea de substanță	mol	mol
Intensitatea luminoasă	candela	cd

Pentru a măsura o mărime în anumite unități de măsură standard, se utilizează *instrumente de măsură* etalonate adecvat, care presupun efectuarea unor anumite *procedee de măsurare*, cum ar fi în cazul determinării lungimii cu rigla, a timpului cu ajutorul ceasului etc.

Deoarece unitățile de măsură au un câmp extrem de larg de aplicabilitate în diferite domenii de activitate umană, studierea lor în învățământul general se realizează pluridisciplinar (la matematică, științe, fizică, chimie etc.) și se valorifică inter- şi transdisciplinar prin diverse activități, de exemplu proiecte STEM/STEAM/STREAM.

Cu referire la cursul primar de matematică, se poate afirma că studierea mărimilor și unităților de măsură reprezintă o interfață între matematică și viața cotidiană a elevilor, oferind suport interacțiunilor dintre diferite discipline şcolare care se învață în clasele primare, dar și care urmează a fi studiate în clasele mai mari.

1.2. Aspecte specifice studierii unităţilor de măsură în clasele primare

În clasele primare, mărimile și unitățile de măsură consituie *un domeniu de conținut* care oferă contexte semnificative de formare a tuturor celor patru competențe specifice disciplinei Matematică.

La nivel de finalități, studiul mărimilor şi al unităţilor de măsură în şcoala primară urmăreşte ca, *pe baza învățării active și experiențiale, a observărilor și reprezentărilor intuitive*, elevii să ia cunoştinţă cu unele mărimi şi unităţi de măsură uzuale, utile în cotidian, să înţeleagă necesitatea unităţilor standard de măsură, să-şi formeze deprinderi de măsurare cu instrumente potrivite, de comparare și estimare a rezultatelor unor măsurări, să efectueze transformări ale unităților de măsură, precum şi să folosească toate aceste achiziții în diferite contexte de învățare și cotidiene.

Conform curriculumului, în clasele II-IV, *conținuturile de învățare referitoare la mărimi și unități de măsură* sunt integrate cu cele de geometrie, constituind unități de învățare „Elemente intuitive de geometrie și măsurări”. Aceste unități de învățare sunt proiectate pentru finele anilor de învățământ, deoarece oferă multiple oportunități pentru transferarea în contexte noi a achizițiilor dobândite în cadrul celorlalte unități de învățare. Dar aceasta nu înseamnă că unitățile de măsură se valorifică doar în respectiva unitate de învățare la finele anului școlar. Dimpotrivă, se utilizează intens în contexte de rezolvare a problemelor și situațiilor de problemă, precum și în contexte de repetare continuă.

În clasa I nu este evidenţiată o unitate de învățare separată pentru unitățile de măsură, dar se prevede un parcurs continuu pe toată perioada anului de învățământ, ceea ce este în corespundere cu particularitățile de vârstă ale micilor școlari și le permite să atingă performanţele scontate.

Tabelul 1.2. Unitățile de măsură prevăzute curricular în clasele primare

Mărimea	*Unități de măsură standard*		*Instrumente de măsurare*
	Unitatea principală	Alte unități	
Lungimea	Metru (m)	Mai mici decât 1 m (submultipli): milimetru (mm); centimetru (cm); decimetru (dm). Mai mari decât 1 m (multipli): kilometru (km).	Rigla; ruleta; metrul de croitorie.
Masa	Kilogram (kg)	Mai mici decât 1 kg (submultipli): gram (g). Mai mari decât 1 kg (multipli): tona (t).	Cântare: balanță; cu arc; electronic; de podea; platformă etc.
Timpul	Secundă (s)	Mai mari decât 1 s: minutul (min); ora (h); ziua; luna; anul; deceniul; secolul; mileniul.	Ceasul mecanic; ceasul electronic; calendarul.
Capacitatea	Litru (*l*)	-	Cana gradată de 1 *l*.

Se învaţă şi *unităţile monetare* folosite în Republica Moldova – *leul* şi *banul*, precum şi formele de circulaţie a acestora – *bancnotele* şi *monedele*.

Subliniem cerinţa de *asigurare a înţelegerii de către elevi a necesității unităţilor standard de măsură*. Încă din preşcolaritate, copiii îşi formează capacităţi de măsurare a unei mărimi cu unităţi nestandarde. Observând că, dacă aceeaşi mărime se măsoară cu diferite unităţi, se obţin rezultate diferite, elevii ajung să înţeleagă necesitatea introducerii măsurilor standarde. Este recomandabil să se valorifice principiul istorismului – să de ofere informații referitoare la unități de măsură folosite în timpurile vechi în ţara noastră şi alte ţări, din care să se concluzioneze că, în procesul intensificării schimbărilor economice şi ştiinţifice, a rezultat necesitatea unificării/standardizării unităţilor de măsură. Asemenea informații se prezintă în manualele școlare în diverse contexte ludice pe bază de calcul [8, p. 84; 97 ș.a.].

1.3. Măsurarea lungimii. Unități de măsură pentru lungime

Lungimea este una dintre mărimile fizice fundamentale. Ea definește *întinderea unui corp pe o anumită direcție spațială*. În funcție de context, se folosesc diferite denumiri pentru lungime: *lungime, lățime, înălțime, adâncime, grosime, distanță*. Este important de a respecta principiul plenitudinii în abordarea lungimilor în toate aceste contexte, astfel încât elevii să fie capabili să recunoască lungimi în diferite situații, de exemplu: lungimea panglicii; lățimea mesei; înălțimea unui copil; grosimea cărții; adâncimea acvariului; distanța dintre localități etc.

În orice context, măsurarea unei lungimi presupune măsurarea lungimii unui segment. A măsura lungimea unui segment înseamnă a afla de câte ori în el se cuprinde un alt segment, considerat drept unitate de măsură. Numărul obţinut reprezintă lungimea segmentului în unităţile de măsură respective. Elevii trebuie să-și formeze deprinderi trainice de măsurare a lungimilor, alegând în mod conştient rigla, ruleta ori metrul de croitorie (cum să fixeze rigla/metrul, cum să determine rezultatul).

Actualmente, în majoritatea statelor lumii, ca unitate standard de măsură pentru lungimi se foloseşte metrul.

Pentru a ghida elevii spre înțelegerea necesității unității standard pentru măsurarea lungimilor, se abordează situații de problemă relevante; de exemplu: „Ana și Dan au măsurat lungimea coridorului cu pasul. Ana a obținut 11 pași, iar Dan – 9 pași. De ce copiii au obținut rezultate diferite? Este comod de a utiliza unități de măsură nestandarde pentru a măsura lungimi?”.

În afară de metru, se mai folosesc şi alte unităţi, ale căror denumiri se formează prin adăugare de prefixe la cuvântul „metru”: *mili* – a mia parte; *centi* – a suta parte; *deci* – a zecea parte; *kilo* – înmiit (de o mie de ori mai mare). În corespundere cu aceste semnificații, relațiile dintre unitățile de măsură pentru lungimi, care se învață în clasele primare, pot fi exprimate în felul următor:

1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm 1 dm = 10 cm = 100 mm 1 cm = 10 mm	1 km = 1 000 m

Reieșind din aceste relații, introducerea unităților de măsură pentru lungimi se prevede în corespundere cu învățarea numerelor naturale și a operațiilor aritmetice pe concentrele numerice:

- în concentrul 0-100: centimetrul și metrul; relația 100 cm = 1 m;
- în concentrul 0-1 000: decimetrul și relațiile respective 10 cm = 1 dm; 10 dm = 1 m;
- în concentrul 0-1 000 000: milimetrul și kilometrul; relațiile 1 000 m = 1 km; 1 000 mm = 1 m; 10 mm = 1 cm.

Se pornește de la centimetri, deoarece măsurarea în centimetri este cea mai accesibilă pentru activități cu micii şcolari, iar rezultatele măsurării în centimetri a lungimilor unor obiecte uzuale pot fi exprimate cu ajutorul numerelor naturale 0-100. Elevii asociază: centimetrul – cu unitatea; decimetrul – cu zecea (o zece de centimetri); metrul – cu suta (o sută de centimetri); kilometrul – cu mia (o mie de metri).

Transformările unităţilor de măsură pentru lungime se învaţă conform dinamicii:

1) *transformări simple* (ale unităţilor de măsură aflate în raportul 1 : 10 sau 10 : 1);

2) *transformări compuse* care se reduc la o succesiune de transformări simple.

Progresiv, elevii vor fi ghidați să observe că, pentru a transforma în unităţi de măsură mai mici, efectuăm înmulţirea, iar pentru a transforma în unităţi de măsură mai mari, efectuăm împărţirea. Însă, la rezolvare nu se va cere formularea şi aplicarea acestor reguli, dar se va urmări realizarea conștientă a unor algoritmi.

- ***Algoritm bazat pe descompunerea în termeni de ordin a numerelor naturale***; de exemplu:

234 = 2 s + 3 z + 4 un	234 cm = 1 m 3 dm 4 cm
1 467 = 1 mie + 4 s + + 6 z + 7 un	1 467 mm = 1 m 4 dm 6 cm 7 mm 1 467 m = 1 km 467 m

Acest algoritm nu poate fi considerat universal, deoarece poate fi aplicat doar în situații specifice.

- ***Algortim în baza semnificației expresiilor „de n ori mai mare / mai mic”***

<u>Exemplul 1.</u> 3 km = ? m

Pasul I. Știm că 1 km = 1 000 m.

Pasul al II-lea. Deci, 1 km este de 1 000 de ori mai mare decât 1 m.

Pasul al III-lea. „De 1 000 de ori mai mare” înseamnă „înmulțit cu 1 000”.

Pasul al IV-lea. Calculăm: 3 × 1 000 = 3 000.

Pasul al V-lea. Obținem: 3 km = 3 000 m.

<u>Exemplul 2.</u> 3 000 cm = ? m

Pasul I. Știm că 100 cm = 1 m.

Pasul al II-lea. Deci, 1 cm este de 100 de ori mai mic decât 1 m.

Pasul al III-lea. „De 100 de ori mai mic” înseamnă „împărțit la 100”.

Pasul al IV-lea. Calculăm: 3 000 : 100 = 30.

Pasul al V-lea. Obținem: 3 000 cm = 30 m.

Acest algoritm poate fi considerat universal, deoarece este aplicabil în orice caz de transformare a unităților de măsură pentru lungimi.

- ***Algoritmi în baza rezolvării unei probleme simple de aflare a produsului sau de împărțire prin cuprindere***

<u>Exemplul 1.</u> 5 m = ? dm

Pasul I. Știm că 1 m conține 10 dm.

Pasul al II-lea. Deci, 5 m vor conține de 5 de ori câte 10 dm.

Pasul al III-lea. Calculăm prin înmulțire: 5 × 10 = 50.

Pasul al IV-lea. Obținem: 5 m = 50 dm.

De fapt, acest raționament presupune alcătuirea și rezolvarea unei probleme simple de aflare a produsului ca sumă de termeni egali:

1 m ... 10 dm

5 m ... ? dm

<u>Exemplul 2.</u> 5 000 m = ? km

Pasul I. Știm că 1 000 m formează 1 km.

Pasul al II-lea. Deci, pentru a afla câți kilometri se conțin în 5 000 m, trebuie să aflăm de câte ori numărul 1 000 se conține în numărul 5 000 (câte mii întregi conține numărul dat).

Pasul al III-lea. Calculăm prin împărțire:

5 000 : 1 000 = 5.

Pasul al IV-lea. Obținem: 5 000 m = 5 km.

Acest raționament presupune alcătuirea și rezolvarea unei probleme simple de împărțire prin cuprindere:

1 km ... 1 000 m

? km ... 5 000 m

Practica educațională a dovedit că transformarea în unități mai mici după algoritmul dat este mai accesibilă micilor școlari decât transformarea în unități mai mari. Pentru prevenirea și combaterea dificultăților este necesară aplicarea consecventă a metodei didactice de algoritmizare.

Menționăm că elevilor trebuie să li se ofere libertatea de a alege algoritmul în funcție de situație și preferință. Important este să efectueze transformările în mod conștient.

1.4. Măsurarea masei. Unităţi de măsură pentru masă

Masa este mărimea care exprimă *cantitatea de materie dintr-un corp*. Deseori, în cotidian, masa este numită greutate. Totuși, masa și greutatea sunt concepte diferite. Greutatea este forța cu care corpul acționează asupra unui suport orizontal și se măsoară în newtoni, iar masa arată cantitatea de materie din acel corp și se măsoară în kilograme, submultipli şi multipli ai kilogramului.

Pentru a măsura masa unui corp, determinăm câte obiecte cu masa de o unitate de măsură cântăresc tot atât cât corpul dat. Numărul acestor obiecte reprezintă masa corpului în unităţile de măsură respective.

Pentru a ghida elevii spre înțelegerea necesității unității standard pentru măsurarea maselor, se abordează situații de problemă relevante; de exemplu, se compară două cântare de tip balanță, pe care două fructe sunt cântărite cu obiecte (unități de măsură) diferite. Se adresează o întrebare problematizatoare: „Puteți spune care fruct este mai greu? De ce?” Ca rezultat al discuțiilor, se concluzionează: „Pentru a putea compara masele obiectelor, s-a convenit să se folosească unități standard. Unitatea principală pentru măsurarea maselor este kilogramul” [8, p. 94].

Deşi conform semnificaţiei prefixului *kilo*, un kilogram este egal cu 1 000 de grame, nu gramul este considerat unitate principală de măsură pentru masă, ci kilogramul. Această decizie s-a luat pentru comoditatea cântăririlor în situaţii practice cotidiene.

Alte unităţi de măsură pentru masa se învaţă în legătură cu relațiile lor cu kilogramul. Astfel, în concentrul numeric 0-1 000 000 se învață gramul și tona, relațiile 1 000 g = 1 kg; 1 000 kg = t.

Elevii sunt familiarizați cu instrumente de măsură a maselor – diferite feluri de cântare, tip balanță și electronice. În prezent există o varietate mare de cântare electronice de precizie, folosite pentru diverse necesități practice; de exemplu: cântar portabil; cântar de baie; cântar de bucătărie; cântar comercial; cântar medical pentru bebeluși; platformă de cântărire pentru autovehicule etc.

Elevii trebuie să fie capabili să aleagă unitățile de măsură și instrumentele potrivite pentru măsurarea maselor în diverse situații cotidiene.

Pentru a efectua **transformări ale unităților de măsură pentru masă**, se folosesc aceiași algoritmi ca și în cazul unităților de măsură pentru lungime.

- ***Algoritm prin analogie cu descompunerea convenabilă a numerelor naturale ca sume de mii și unități***; de exemplu:

1 467 = 1 mie + 467 un

1 467 g = 1 kg 467 g
1 467 kg = 1 t 467 kg

- ***Algoritm în baza semnificației expresiilor „de n ori mai mare / mai mic”***

<u>Exemplul 1.</u> 3 kg = ? g

Pasul I. Știm că 1 kg = 1 000 g.

Pasul al II-lea. Deci, masa unui kilogram este de 1 000 de ori mai mare decât masa unui gram.

Pasul al III-lea. „De 1 000 de ori mai mare” înseamnă „înmulțit cu 1 000”.

Pasul al IV-lea. Calculăm: 3 × 1 000 = 3 000.

Pasul al V-lea. Obținem: 3 kg = 3 000 g.

<u>Exemplul 2.</u> 3 000 kg = ? t

Pasul I. Știm că 1 000 kg = 1 t.

Pasul al II-lea. Deci, masa unui kilogram este de 1 000 de ori mai mică decât masa unei tone.

Pasul al III-lea. „De 1 000 de ori mai mică” înseamnă „împărțit la 1 000”.

Pasul al IV-lea. Calculăm: 3 000 : 1 000 = 3.

Pasul al V-lea. Obținem: 3 000 kg = 3 t.

- ***Algoritm în baza rezolvării unei probleme simple de aflare a produsului sau de împărțire prin cuprindere***

<u>Exemplul 1.</u> 5 t = ? kg

Pasul I. Știm că 1 t conține 1 000 kg.

Pasul al II-lea. Deci, 5 t conțin de 5 de ori câte 1 000 kg.

Pasul al III-lea. Calculăm prin înmulțire:
5 × 1 000 = 5 000.

Pasul al IV-lea. Obținem: 5 t = 5 000 kg.

De fapt, acest raționament presupune alcătuirea și rezolvarea unei probleme simple de aflare a produsului ca sumă de termeni egali:

1 t … 1 000 kg
5 t … ? kg

<u>Exemplul 2.</u> 5 000 g = ? kg

Pasul I. Știm că 1 000 g formează 1 kg.

Pasul al II-lea. Deci, pentru a afla câte kilograme se conțin în 5 000 g, trebuie să aflăm de câte ori numărul 1 000 se conține în numărul 5 000 (câte mii întregi conține numărul dat).

Pasul al III-lea. Calculăm prin împărțire:

5 000 : 1 000 = 5.

Pasul al IV-lea. Obținem: 5 000 g = 5 kg.

Acest raționament presupune alcătuirea și rezolvarea unei probleme simple de împărțire prin cuprindere:

1 kg ... 1 000 g

? kg ... 5 000 g

1.5. Măsurarea capacităţii. Unităţi de măsură pentru capacitate

În diverse situaţii practice avem nevoie să cunoaştem capacităţile unor vase (recipiente): pahare, urcioare, borcane, butoaie, cisterne etc. Capacitatea unui recipient exprimă *volumul spaţiului lui interior (volumul util)*. Totodată, capacitatea vasului exprimă *volumul lichidului care îl umple*.

Deoarece capacitatea exprimă un volum, la măsurarea capacităţilor pot fi folosite unităţi de măsură pentru volum. Însă metrul cub este prea mare şi incomod în situaţiile cotidiene. De exemplu, 1 m^3 de apă este mai mult decât încape într-o cadă de baie obişnuită. De aceea, pentru măsurarea capacităţilor, dar şi a volumelor de lichide, s-a introdus o altă unitate de măsură standard – *litrul* (*l*).

Noțiunea de volum și relația dintre volum și capacitate se studiază în clasa a V-a. În clasele primare se studiază doar capacitatea vaselor și litrul ca unitate de măsură pentru capacitate.

În clasa I, pe baza unor imagini sugestive, copiii se familiarizează cu lichidele (acestea pot curge) și cu vase în care pot fi păstrate lichidele. Se explică: „Cantitatea de lichid cu care se umple un vas exprimă capacitatea vasului" [5, p. 110]. Se prezintă butelia cu 1 *l* de suc drept unitate de măsură pentru capacitate, fără a introduce termenul „unitate de măsură".

Pentru a asigura retenția și transferul, se realizează sarcini de diferențiere a situațiilor în care se măsoară în litri și în care se măsoară în kilograme; de exemplu: 2 *l* de lapte, 2 kg de sare. Pentru consolidare și dezvoltare, noțiunea de capacitate se valorifică în rezolvarea de probleme și situații de problemă.

În clasele II-IV se asigură înțelegerea necesității de introducere a unității de măsură standard, se antrenează măsurarea lichidelor folosind cana gradată de un litru, se compară vase după capacitate, se contrapune măsurarea capacității cu măsurarea masei, se rezolvă diverse probleme și situații de problemă.

Pentru a ghida elevii spre înțelegerea necesității unității standard pentru măsurarea capacităților, se abordează situații de problemă relevante; de exemplu: „Sorin și Diana au turnat câte 5 cești de lapte în urcioare identice. De ce urciorul Dianei este mai plin decât urciorul lui Sorin?" Elevii trebuie să constate că ceașca Dianei a fost mai mare, a avut o capacitate mai mare decât ceașca lui Sorin. Ca rezultat, se concluzionează: „Pentru ca la măsurarea capacității unui vas să nu se obțină rezultate diferite, s-a decis, la fel ca și în cazul măsurării lungimii și a masei, să se folosească unități standard. Unitatea principală pentru măsurarea capacității este litrul (*l*)" [8, p. 96].

1.6. Măsurarea timpului. Unităţi de măsură pentru timp

Timpul este mărimea ce *exprimă durata unui eveniment*. Este una dintre dimensiunile Universului pe care nu o putem defini, dar îi percepem semnele: alternanţa zilelor şi nopţilor; succesiunea anotimpurilor; îmbătrânirea etc. Timpul se deosebeşte de alte mărimi prin *caracterul său continuu şi* *ireversibil: el se scurge neîncetat într-un singur sens, dinspre trecut spre viitor.*

Din cele mai străvechi timpuri, oamenii au încercat să înregistreze şi să controleze scurgerea timpului, fragmentându-l în intervale de durate diferite – unităţi de măsură pentru timp.

Unitatea de măsură standard pentru timp este **secunda (s).**

Pe cadranul unui ceas putem urmări cum la fiecare 60 de secunde se adaugă un *minut*, la fiecare 60 de minute se adaugă *o oră*, până când se scurg toate cele 24 de ore ale unei zile.

În calendar putem vedea cum se succed 7 *zile* în fiecare *săptămână* şi 28, 29, 30 sau 31 de zile într-o *lună*, până când ajung să se însumeze 365 sau 366 de zile în cele 12 luni ale unui *an*.

Axa cronologică ne ajută să înţelegem timpul pe scară istorică. Anul naşterii lui Hristos se consideră anul întâi şi desparte *era* noastră de perioada anterioară, dinaintea erei noastre. În era noastră, fiecare 10 ani au adăugat un *deceniu*, fiecare 10 decenii au adăugat un s*ecol*, până când s-au scurs toate cele 10 secole ale *mileniului* întâi. Au urmat 10 secole ale mileniului al doilea şi a început mileniul al treilea, în care suntem acum.

Astfel, **relațiile dintre unitățile de măsură a timpului** sunt următoarele:

- 60 s = 1 min;
- 60 min = 1 oră;
- 24 ore = 1 zi;
- 7 zile = 1 săpt.;
- o lună poate dura de la 28 până la 31 de zile; luna februarie are 29 de zile într-un an bisect şi 28 de zile în

ceilalți ani; anii bisecți survin o data la 4 ani; pentru a determina dacă anul este bisect, trebuie să determinăm dacă se împarte exact la 4; de exemplu, anul 2 000 a fost bisect, deoarece 2 000 : 4 = 500;

- un an are 12 luni și durează 366 de zile dacă este bisect, sau 365 de zile dacă nu este bisect;
- 10 ani = 1 deceniu;
- 10 decenii = 1 secol;
- 10 secole = 1 mileniu.

Una dintre competențele importante aferente măsurării timpului se referă la **folosirea ceasului mecanic**. Treptat, elevii au de însușit:

- elementele ceasului mecanic: cadranul ceasului cu diviziuni numerotate; orarul (acul orar); minutarul (acul minutar); secundarul (acul secundar);
- mișcarea acelor pe cadranul ceasului: orarul descrie un cerc timp de 12 ore, minutarul – timp de 1 oră; secundarul – timp de 1 minut;
- părțile zilei: până la amiază și după-amiază; amiaza – ora 12;
- citirea pe ceas a orelor până la amiază și după-amiază.

Competențele de **folosire a ceasului electronic** se formează prin corelare cu cele referitoare la ceasul mecanic. Elevii trebuie să fie capabili să citească indicațiile unui ceas electronic, să le reprezinte pe cadranul ceasului mecanic și invers.

Este de menționat că, actualmente, când elevii dețin telefoane mobile cu ceas electronic încorporat, folosirea acestuia este mult mai accesibilă decât folosirea ceasului mecanic. Pentru a preveni și combate dificultățile, se recomandă:

- folosirea, ca mijloace didactice demonstrative și distributive, a unor modele de ceas mecanic cu ace mobile, pe care elevii le pot mișca;
- prezența unui ceas mecanic de perete în sala de clasă, la care să se apeleze în variate situații; de exemplu, pentru a determina: ora la care începe și se termină o lecție, o recreație, o activitate de lucru independent;
- întocmirea regimului zilei cu reprezentări pe cadranele ceasului mecanic și ceasului electronic;
- rezolvarea diverselor situații de problemă din cotidian;
- diferite activități ludice;
- dictări matematice; de exemplu: reprezentarea pe cadrane desenate din timp a orelor citite de către învățător; înregistrarea/scrierea orelor demonstrate de învățător pe cadranul unui model de ceas etc.

În cadrul formării competențelor de **folosire a calendarului**, elevii învață succesiunea săptămânilor, pe care o urmăresc și în agendă; marcarea sărbătorilor, zilelor de odihnă (zile cu roșu în calendar); succesiunea lunilor în anotimpuri și în an; numărul de zile în fiecare lună (procedeul ludic pe oscioarele pumnilor) [6, p. 126]; numărul de zile într-un an; determinarea anilor bisecți (divizibilitatea cu 4) [8, p. 101].

Pentru a forma competențe de **transformare a unităților de măsură a timpului**, se recomandă *algoritmizarea*.

<u>Exemplul 1.</u> 3 600 s = ? min.

Pasul I. Știm că 60 s = 1 min.

Pasul al II-lea. Deci, pentru a afla câte minute se conțin în 3 600 s, trebuie să aflăm de câte ori numărul 60 se conține în numărul 3 600.

Pasul al III-lea. Calculăm prin împărțire:

3 600 : 60 = 360 : 6 = 60.

Pasul al IV-lea. Obținem: 3 600 s = 60 min = 1 oră.

Exemplul 2. 7 ore = ? min.

Pasul I. Știm că 1 oră = 60 min.

Pasul al II-lea. Deci, 7 ore vor conține de 7 ori câte 60 de minute.

Pasul al III-lea. Calculăm prin înmulțire: 7 × 60 = 420.

Pasul al IV-lea. Obținem: 7 ore = 420 min.

Exemplul 3. 90 min = ? ore ? min.

Pasul I. Știm că 60 min = 1 oră.

Pasul al II-lea. Descompunem numărul 90 ca sumă de doi termeni potriviți, primul fiind 60:

90 min = 60 min + 30 min.

Pasul al III-lea. Obținem: 90 min = 1 oră 30 min.

Exemplul 4. 285 min = ? ore ? min.

Pasul I. Știm că 60 min = 1 oră.

Pasul al II-lea. Deci, pentru a afla câte ore întregi se cuprind în 280 min, trebuie să aflăm de câte ori a câte 60 se cuprind în 280.

Pasul al III-lea. Calculăm prin împărțire cu rest:

- Aflăm câtul: 240 este numărul cel mai apropiat de 285, dar mai mic decât 285, care se împarte exact la 60: 240 : 60 = 4 - câtul;
- Aflăm restul: 285 – 240 = 45 – restul.

Pasul al IV-lea. Obținem: 285 min = 4 ore 45 min.

1.7. Unităţi monetare

Unităţile monetare măsoară *valoarea materială a mărfurilor şi a serviciilor în procesul economic de vânzare–*

cumpărare. În acest proces, unităţile monetare circulă sub formă de *monede* şi *bancnote*. În prezent, tranzacţiile pot fi înlesnite prin diverse modalităţi: virament, cec sau card electronic.

Diferite state au diferite unităţi monetare. Unităţile monetare din Republica Moldova sunt *banul* și *leul*, relația dintre ele este: 1 leu = 100 bani.

Monedele și bancnotele se emit și se retrag din circulație de către Banca Națională a Republicii Moldova.

Pentru formarea competențelor de utilizare a unităților monetare se recomandă activități cu sprijin în obiecte – monede și bancnote confecționate din carton; de exemplu:

- jocuri de rol ce implică schimbul de bani (de exemplu, „De-a magazinul”);
- folosirea bancnotelor ca mijloc didactic în formarea competențelor de calcul, când unitățile se reprezintă prin bancnote de 1 leu, zecile – prin bancnote de 10 lei, sutele – prin bancnote de 100 lei, iar împrumutul la ordinul superior – prin schimb de bani; de exemplu, o bancnotă de 10 lei se schimbă cu 10 bancnote de 1 leu.

Pentru a realiza transformările *bani* ↔ *lei*, elevii pot alege un raționament preferat.

Exemplul 1. 24 lei 30 bani = ? bani

Pasul 1. Știm că 1 leu = 100 bani.

Pasul 2. Substituim și calculăm:

24 × 100 bani + 30 bani = 2 430 bani.

Exemplul 2. 45 000 bani = ? lei

Pasul I. Știm că 100 bani = 1 leu.

Pasul al II-lea. Pentru a afla câți lei constituie 45 000 de bani, trebuie să aflăm de câte ori acest număr îl cuprinde pe 100 (câte sute întregi conține numărul dat).

Pasul al III-lea. Calculăm prin împărțire la 100, deci, omitem două zerouri la dreapta numărului 45 000.

Pasul al IV-lea. Obținem: 45 000 bani = 450 lei.

Exemplul 3. 1 450 bani = ? lei ? bani

Pasul I. Știm că 1 leu = 100 bani.

Pasul al II-lea. Descompunem numărul 1 450 ca sumă de sute întregi și unități: 1 450 = 14 s + 50 un.

Pasul al III-lea. Asociind sutele cu lei, iar unitățile – cu bani, obținem: 1 450 bani = 14 lei 50 bani.

În legătură cu valoarea materială a mărfurilor, se formează reprezentări despre: *cost*, care exprimă valoarea mărfii; *preţ*, care exprimă costul unei unităţi de marfă.

În clasa a II-a se dezvăluie relaţia dintre *cantitatea* unităţilor de marfă, *preţul* şi *costul* mărfii:

Cantitatea × *Preţul* = *Costul*.

Respectiv, se deduce:

Cantitatea = *Costul* : *Preţ*; *Preţul* = *Costul* : *Cantitate*.

Aceste dependenţe se valorifică la rezolvarea problemelor și situațiilor de problemă cu tematică de vânzare-cumpărare.

Exemplul 1. Completați tabelul:

	Cantitatea (bucăți)	Prețul (lei)	Costul (lei)
Baloane	150	20	
Cărți	700		56 000
Pixuri		5	20 500

Exemplul 2. Situație de problemă: „Doamna Ciobanu vrea să cumpere în rate o mașină de spălat la prețul de 4 850 de lei. Dacă va plăti lunar 400 de lei, va reuși să achite prețul mașinii într-un an?” [8, p. 103].

Raționament rezolutiv:

1) Dacă va plăti lunar 400 lei, atunci într-un an (12 luni) va achita 12 × 400 lei = 4 800 lei.

2) Prețul mașinii este mai mare decât această sumă: 4 850 lei > 4 800 lei.

3) Deci, nu va reuși să achite prețul mașinii de spălat într-un an.

Exemplul 3. Investigație: „Cercetați lista ingredientelor pentru prepararea unui tort și calculați costul lor total” [8, p. 98].

Ingredientele	Cantitatea	Prețul
ouă	7	2 lei 50 bani bucata
făină	500 g	10 lei kilogramul
lapte	1/5 din 1 *l*	15 lei litrul
zahăr	½ din 1 kg	13 lei kilogramul
cacao	100 g	160 lei kilogramul
unt	200 g	130 lei kilogramul

Rezolvare:

1) Aflăm costul ouălor.
   2 lei 50 bani = 250 bani
   7 × 250 bani = 1 750 bani = 17 lei 50 bani
2) Aflăm costul făinii.
   500 g = $\frac{1}{2}$ din 1 kg
   10 lei : 2 = 5 lei
3) Aflăm costul laptelui.
   15 lei : 5 = 3 lei
4) Aflăm costul zahărului.
   13 lei : 2 = 6 lei 50 bani
5) Aflăm costul cacao.
   100 g = $\frac{1}{10}$ din 1 kg
   160 lei : 10 = 16 lei
6) Aflăm costul untului.
   200 g = $\frac{1}{5}$ din 1 kg
   130 lei : 5 = 26 lei

7) Aflăm costul total.
17 lei 50 bani + 5 lei + 3 lei + 6 lei 50 bani + 16 lei +
+ 26 lei = 74 lei

Trebuie de subliniat că formarea competențelor de utilizare a unităților monetare are un pronunțat impact în viața cotidiană a elevilor.

ACTIVITĂȚI APLICATIVE

Activități diferențiate în echipe sau perechi

1. Identificați și argumentați legăturile interdisciplinare între studiul unităților de măsură la Matematică și valorificarea acestora la alte discipline școlare.

2. Elaborați prezentări electronice în vederea valorificării principiului istorizmului în predarea-învățarea mărimilor și unităților de măsură în clasa a IV-a.

3. Creați postere electronice pe care să prezentați relațiile dintre unitățile de măsură pentru mărimile ce se studiază în clasele primare.

4. Selectați din manualele de matematică pentru clasele primare sarcini în vederea: **a)** înțelegerii necesității unităților de măsură standarde: **b)** alegerii unităților de măsură potrivite în situații date. Argumentați importanța acestora. Ce dificultăți pot întâmpina elevii la realizarea acestor sarcini? Propuneți soluții de prevenire și combatere a dificultăților.

5. Confecționați machete de cadran al ceasului mecanic cu ace mobile. Proiectați și prezentați colegilor activități cu folosirea acestui material didactic în clasele I-IV.

6. Analizați proba de evaluare formativă punctuală propusă în Anexa 1.1. Elaborați: **a)** varianta a II-a a probei, prin clonare; **b)** o prezentare electronică pentru realizarea autoverificării; **c)** o schiță a activității didactice în vederea autocorectării și autoaprecierii de către elevi a rezultatelor obţinute; **d)** recomandări succinte privind verificarea și aprecierea lucrărilor elevilor de către învățător.

7. Analizați sugestiile metodologice propuse pentru lecția „Măsurarea capacității” în Ghidul de implementare a manualului de matematică pentru clasa a II-a [10, p. 56-59]. Alegeți sugestii preferate și elaborați o schiță a proiectului didactic al lecției vizate.

8. Propuneți, pentru studiul unităților de măsură în clasele primare, modalități de valorificare a: **a)** proiectelor individuale; **b)** proiectelor de grup; **c)** proiectelor STEM/STEAM.

Activități individuale

9. Selectați din manualele de matematică pentru clasele III-IV sarcini de transformare a unităților de măsură pentru: **a)** lungime; **b)** masă; **c)** timp. Prezentați colegilor modele de comentare orală și scriere a transformărilor în unități de măsură mai mari; în unități de măsură mai mici. Realizați evaluarea reciprocă.

10. Analizați fișele diferenţiate/individualizate de sprijin/ghidare a elevilor în efectuarea transformărilor unităților de măsură pentru lungime, prezentate în Anexa 1.2. Elaborați fișe asemănătoare în baza altor sarcini de transformare a unităților de măsură pentru lungime, masă, timp. Propuneți modalități de aplicare a unor asemenea fișe.

2. METODOLOGIA PREDĂRII-ÎNVĂŢĂRII-EVALUĂRII FRACŢIILOR

2.1. Introducerea noţiunii de fracţie

În conformitate cu prevederile curriculare, noţiunea de fracţie se introduce în clasa a IV-a, după ce, în contextul studierii cazurilor tabelare de împărţire în clasa a II-a, au fost formate şi ulterior dezvoltate reprezentări despre unitatea fracţionară (fără a folosi acest termen): jumătate, a doua parte; treime, a treia parte; sfert, a patra parte etc. De exemplu, în contextul construcției tablei împărțirii la 2, se formulează următoarele propoziții:

- la împărțirea unui număr la 2 se obține un număr de 2 ori mai mic, numit jumătatea acestui număr;
- numărul este de 2 ori mai mare decât jumătatea sa [6, p. 71].

Treptat, elevii ajung să înţeleagă că:

- pentru a afla a n-a parte dintr-un număr, se împarte acel număr la n;
- a n-a parte dintr-un număr este de n ori mai mică decât acel număr;
- numărul este de n ori mai mare decât a n-a sa parte.

Dinamica introducerii noțiunii de fracție în clasa a IV-a prevede cercetarea acelorași tipuri de modele ale noului ca și la introducerea oricărei noțiuni matematice la vârsta școlară mică: *modele obiectuale; modele figurative; modele simbolice; modele verbale.*

În modelele obiectuale:

- întregul se concretizează printr-un obiect real (de exemplu, o bucată de panglică, o foaie de hârtie), iar operaţia de fracţionare a întregului este, de asemenea, concretă (de exemplu, tăierea panglicii în părţi egale, decuparea sau plierea foii de hârtie în părţi egale);
- întregul se concretizează printr-un grup (o mulţime) de obiecte concrete (de exemplu, cuburi, nuci), iar operaţia de fracţionare a întregului constă în clasificarea mulţimii în submulţimi echivalente (de exemplu, formarea de stâlpuşoare din acelaşi număr de cuburi, repartizarea a câte același număr de nuci în pahare de unică folosință).

În modelele figurative:

- întregul se reprezintă printr-o formă geometrică (de exemplu, segment, pătrat, dreptunghi, cerc, cub), iar operaţia de fracţionare a întregului se reprezintă prin trasare de linii care împart figura în părţi egale şi colorarea părţilor luate în considerație;
- întregul se reprezintă printr-un grup (o mulţime) de forme geometrice, iar operaţia de fracţionare a întregului se reprezintă prin încercuirea submulţimilor echivalente în care se clasifică mulţimea de figuri.

În modelele simbolice:

- întregul constituie un număr natural, iar operaţia de fracţionare a întregului se înţelege ca împărţire în părţi egale;
- se introduce scrierea fracției (de exemplu, $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{7}$) și a întregului (1).

Modelele verbale valorifică terminologia specifică: întreg, fracție, numitorul fracției, numărătorul fracției, linie de fracție.

În continuare se evidențiază **aspecte specifice** ale procesului de introducere a noțiunii de fracție în clasa a IV-a.

1. Deoarece înțelegerea noțiunii de fracție este destul de dificilă pentru micii școlari, *cercetarea modelelor obiectuale este importantă în acest caz și nu poate fi omisă.*

2. Pentru modelele obiectuale este necesar un *material intuitiv relevant și variat*, în alegerea căruia învățătorul trebuie să țină cont de mai multe aspecte. De exemplu, dacă se aleg citrice sau ciocolate, există riscul ca unii elevi să manifeste, ca urmare, reacții alergice. Folosirea produselor alimentare în modelele obiectuale nu este recomandabilă și din motivul că elevii vor fi atrași de gustul dorit, iar concentrația asupra înțelegerii noii noțiuni se va diminua.

Așadar, se recomandă obiecte care să permită modelarea pertinentă a fracției, fără ca atenția elevilor să fie distrasă de alte aspecte nesemnificative. Pot fi utile: o bucată de panglică/frânghie/stofă; o foaie de hârtie; o mulțime de castane/ghinde/conuri de brad/nuci/cubulețe etc.

3. În cazul modelelor figurative se observă imagini sugestive, pe baza cărora se realizează *desene schematice*, luând ca întreg o formă geometrică, împărțind-o prin linii în părți egale și colorând una sau mai multe dintre aceste părți.

4. Experimentarea variantelor de pliere/decupare și de reprezentare schematică în contextul modelelor obiectuale și figurative este foarte importantă din perspectiva dezvoltării imaginației spațiale a elevilor. De exemplu, în cazul în care ca întreg este luat un dreptunghi, sunt posibile următoarele variante de reprezentare a fracției $\frac{3}{4}$:

5. Se recomandă *abordarea simultană a modelelor vizate*. Modelele obiectuale se abordează simultan cu cele abstracte și, parțial, cu cele verbale; la fel și modelele figurative. Astfel, ajungând la formulările generalizatoare, elevii vor fi bine pregătiți pentru a le înțelege. În acest scop, atât în cercetarea modelelor obiectuale cât și a celor figurative, elevii sunt ghidați printr-o conversație euristică cu ajutorul următoarelor trei întrebări:

1) Cum este reprezentat întregul? (Ce este întreg?)

2) În câte părți egale a fost împărțit întregul?

3) Câte dintre aceste părți egale sunt luate /colorate/considerate? [8, p. 68].

Ca rezultat, elevii sunt ghidați către scrierea comentată; de exemplu, în cazul reprezentării fracției $\frac{2}{5}$:

Comentariu oral:		*Scriere (simultan):*
Am luat/colorat două	$\longrightarrow$	2
din	$\longrightarrow$	–
cele cinci părți egale în care a fost împărțit întregul.	$\longrightarrow$	5

Ca suport pentru comentare poate fi elaborată o planșa demonstrativă sau un slide PowerPoint; de exemplu:

☐ din cele ☐ părți egale în care a fost împărțit întregul.

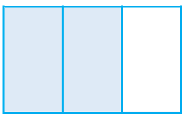
6. Dacă învățătorul ghidează competent procesul de introducere a noțiunii de fracție în contextele descrise mai sus pentru modelele obiectuale și figurative, atunci înțelegerea la nivelurile modelelor simbolice și verbale nu va prezenta dificultăți pentru elevi.

- Una sau mai multe dintre părțile egale în care a fost împărțit întregul se numește **fracție**.

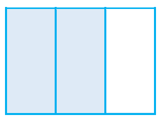
- Fracţia se scrie cu ajutorul a două numere, aranjate unul deasupra celuilalt şi despărţite printr-o linie orizontală – linie de fracţie.
- Numărul scris sub linia de fracţie arată în câte părţi egale a fost împărţit întregul şi se numeşte **numitorul fracţiei**.
- Numărul scris deasupra liniei de fracţie arată câte părţi egale au fost luate în consideraţie şi se numeşte **numărătorul fracţiei** [8, p. 68].

Pentru asigurarea retenţiei şi transferului, se propun următoarele tipuri de sarcini.

- ***Sarcini de identificare, scriere şi citire a fracţiilor reprezentate prin desene***; de exemplu:

Observăm	*Comentăm*	*Scriem*	*Citim*
	Sunt colorate 2 dintre cele 3 părţi egale în care a fost împărţit întregul.	$\frac{2}{3}$	Doi supra trei; două treimi; numărătorul 2; numitorul 3.

- ***Sarcini de explorare a modalităţilor de reprezentare prin desen a fracţiilor***; de exemplu:

Observăm	*Citim*	*Comentăm*	*Alegem întregul şi desenăm*
$\frac{2}{3}$	Doi supra trei; două treimi; numărătorul 2; numitorul 3.	Vom colora 2 dintre cele 3 părţi egale în care a fost împărţit întregul.	

▪ ***Contraexemple didactice*** cu scopul de a preveni și combate dificultățile de înțelegere a noțiunii de fracție; de exemplu: „Observă cum a reprezentat Nătăfleață fracția $\frac{3}{4}$. Ce greșeli a comis?” [8, p. 69]. Greșeli de identificat:

a) părțile în care a fost împărțit întregul nu sunt egale;
b) numărul părților egale în care a fost împărțit întregul nu este egal cu numitorul fracției;
c) numărul părților colorate nu este egal cu numărătorul fracției.

▪ ***Dictări matematice*** de scriere a fracțiilor pe baza înțelegerii terminologiei aferente;

▪ ***Jocuri didactice*** cu scopuri aferente înțelegerii noțiunii de fracție; de exemplu jocul propus mai jos.

Joc didactic „Cine vine în echipa mea?”

Scopul jocului: dezvoltarea capacităților de identificare, scriere, citire și reprezentare prin desen a fracțiilor

Sarcina didactică: să asocieze scierea, citirea, explicarea formării, reprezentarea prin desen a fracțiilor date

Sarcina de joc: să formeze echipe de 4 elevi care au carduri corespunzătoare aceleiași fracții

Regulile jocului:

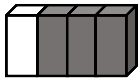
▪ Elevilor li se distribuie aleatoriu carduri pregătite din timp. Fiecare elev primește un card pe care se prezintă scrierea sau o reprezentare prin desen a unei fracții.

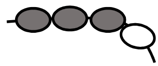
▪ Învățătorul începe jocul și oferă elevilor un model de activitate. Arată cardul său, pe care este scrisă, de exemplu, fracția $\frac{3}{4}$, și zice: „Pe cardul meu este scrisă fracția *trei supra patru* sau *trei pătrimi*, sau *trei sferturi*. Numărătorul fracției este 3, iar numitorul ei este 4. Invit în echipa mea elevii care au pe card aceeași fracție. Cine vine în echipa mea?”

- Învățătorului i se alătură 3 elevi, pe cardurile cărora este reprezentată prin desen aceeași fracție. Învățătorul îi ajută să argumenteze: „Pe desenul meu sunt colorate 3 dintre cele 4 părți egale în care a fost împărțit întregul – un cerc/segment/pătrat etc. Deci, este reprezentată tot fracția $\frac{3}{4}$."

Exemple de carduri pentru o echipă:

$\frac{3}{4}$





- Echipa formată rămâne în fața clasei.
- Învățătorul transmite ștafeta jocului unui elev și jocul este continuat în mod analog, până se formează toate echipele. Este posibil ca jocul să înceapă de la o reprezentare prin desen a fracției, iar în echipă să vină un elev cu fracția scrisă și încă doi cu alte reprezentări.

Evaluarea jocului se realizează în baza criteriilor prestabilite de comun acord cu elevii: corectitudinea acțiunilor; coerența argumentărilor; rapiditatea acțiunilor; comportamentul adecvat.

2.2. Operaţii cu fracţii care au acelaşi numitor

În clasa a IV-a se studiază adunarea şi scăderea fracţiilor cu acelaşi numitor. Introducerea fiecăreia dintre aceste operaţii se realizează printr-o strategie inductivă pe bază de suporturi intuitive ***pe acelaşi întreg***.

Adunarea fracțiilor cu același numitor

- Se cercetează primul model figurativ; de exemplu:

Verde	
Roşu	*Verde*

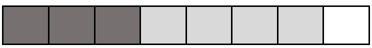
▪ Învățătorul ghidează elevii printr-o conversație euristică cu ajutorul următoarelor întrebări:

Întrebări pentru ghidare	*Răspunsuri așteptate*
Observați desenul. Cum este reprezentat întregul?	Întregul este reprezentat printr-un dreptunghi.
Ce parte din întreg este colorată cu roșu?	O pătrime (una din cele patru părți egale în care este împărțit întregul).
Ce parte din întreg este colorată cu verde?	Două pătrimi (două din cele patru părți egale în care a fost împărțit întregul).
Ce parte din întreg este colorată în total?	Trei pătrimi (trei din cele patru părți egale în care a fost împărțit întregul).

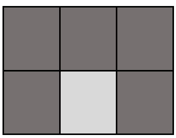
▪ Se scrie exercițiul respectiv: $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$.

▪ Se observă că s-au adunat numărătorii, iar numitorul a rămas același.

▪ Se cercetează în mod analog încă două modele figurative; de exemplu:



$$\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}$$



$$\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Subliniem că este necesar ca, într-unul din modelele figurative cercetate, să se obțină ca sumă o fracție echiunitară (care are numărătorul egal cu numitorul), aceasta fiind substituită la final cu 1 (un întreg).

▪ Se citește din manual regula: „La adunarea a două sau mai multe fracții cu același numitor, obținem o fracție care

are, și ea, același numitor. Pentru a afla numărătorul fracției-sumă, adunăm numărătorii fracțiilor date” [8, p. 71].

Scăderea fracțiilor cu același numitor

Pentru introducerea scăderii fracțiilor cu același numitor poate fi realizată o strategie analogică cu cea pentru introducerea adunării fracțiilor cu același numitor – pe baza cercetării de modele figurative. Dar poate fi propusă și o strategie inductivă pe baza unor situații de problemă ilustrate sau figurate. Să exemplificăm o asemenea strategie.

- Se abordează prima situație de problemă; de exemplu: „Pe o farfurie erau 3 dintre cele 7 felii identice în care a fost împărțită o ruladă. Dan a luat o felie din farfurie. Ce parte din ruladă a rămas pe farfurie?” [ibidem, p. 72].

Printr-o conversație euristică, învățătorul ghidează elevii în rezolvarea prin exercițiu:

Întrebări pentru ghidare	*Răspunsuri așteptate*
Ce a fost întreg?	Rulada.
În câte părți egale a fost împărțit întregul?	În 7 părți egale.
Ce parte din întreg era pe farfurie la început?	Trei șeptimi (trei din cele șapte părți egale în care a fost împărțit întregul).
Ce parte din întreg a luat Dan?	O șeptime (una din cele șapte părți egale în care a fost împărțit întregul).
Ce parte din întreg a rămas pe farfurie?	Două șeptimi (două din cele șapte părți egale în care a fost împărțit întregul).

- Se scrie exercițiul respectiv: $\frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$.
- Se observă că numărătorii s-au scăzut între ei, iar numitorul a rămas același.

- Se abordează în mod analog încă două situații de problemă. Este necesar ca, într-una din acestea, să se solicite o scădere din întreg, care se substituie cu o fracție echiunitară potrivită. De exemplu: „Mama a tăiat un tort în 6 părți egale. Copiii au mâncat $\frac{5}{6}$ din tort. Ce parte din tort a rămas?” [8, p. 72]. Pentru a rezolva, întregul se substituie cu fracția $\frac{6}{6}$:

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

- Se citește din manual regula: „La scăderea a două fracții cu același numitor, obținem o fracție care are, și ea, același numitor. Pentru a afla numărătorul fracției-diferență, scădem numărătorii fracțiilor date” [idem].

Pentru consolidare și dezvoltare se propun următoarele tipuri de sarcini/activități:

- efectuarea adunării și scăderii fracțiilor cu același numitor, cu și fără sprijin în desene;
- exerciții lacunare în care numărătorul sau numitorul unei fracții este ascuns de un simbol/imagine;
- completarea unor succesiuni/șiruri de fracții cu același numitor pe baza identificării prin observare a regulii de formare;
- rezolvarea de probleme/situații de problemă;
- contraexemple didactice cu scopul de a preveni și combate eventuale dificultăți;
- dictări matematice;
- jocuri didactice.

Exemplificăm două situații de problemă abordate în calitate de contraexemple didactice, în care se cere identificarea și corectarea greșelilor comise de Nătăfleață [ibidem, p. 73].

a) Nătăflează zice: „Am mâncat $\frac{1}{2}$ dintr-o tartă. Mi-a rămas mai puțin decât am mâncat."

Nătăfleață a greşit la concluzie. Deoarece el a mâncat $\frac{1}{2}$ din tarta întreagă, i-a rămas tot atât, cât a mâncat:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

b) Nătăflează zice: „$\frac{3}{5}$ din fructele din coş sunt mere, $\frac{1}{5}$ sunt pere şi $\frac{2}{5}$ sunt nuci."

La adunarea acestor fracţii ar trebui să obţinem un întreg – toate fructele din coș. Dar nu se adeverește:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}.$$

Pentru a corecta, putem propune mai multe variante; de exemplu:

– înlocuind fracția $\frac{3}{5}$ cu $\frac{2}{5}$, obținem:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1;$$

– înlocuind fracția $\frac{2}{5}$ cu $\frac{1}{5}$, obținem:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}=1.$$

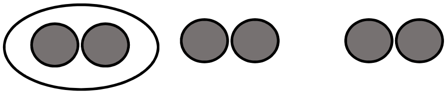
2.3. Probleme cu fracţii. Aflarea unei fracţii dintr-un întreg

Problemele cu fracţii abordate în clasa a IV-a se bazează pe aflarea unei fracții dintr-un întreg și sunt atât simple cât și compuse.

Aflarea unei unități fracționare dintr-un întreg

Se abordează pe baza unei probleme simple, care se rezolvă cu sprijin în obiecte sau desene. De exemplu: „În farfurie erau 6 nuci. Radu a luat $\frac{1}{3}$ din ele. Câte nuci a luat Radu?” [8, p. 74].

În acest caz, întregul este reprezentat printr-o mulțime de 6 nuci. Fracția $\frac{1}{3}$ ne arată că întregul (cele 6 nuci) a fost împărțit în 3 părți egale (fiecare parte a câte 6 : 3 = 2 nuci), iar Radu a luat una dintre aceste părți. Putem figura prin următorul desen:



Obținem rezolvarea prin exercițiu: $\frac{1}{3}$ din $6 = 6 : 3 = 2$.

Observăm că, pentru a afla $\frac{1}{3}$ dintr-un număr, am împărțit numărul dat la 3, adică la numitorul fracției.

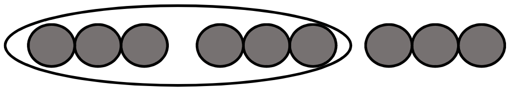
În bază de transfer prin analogie, elevii sunt ghidați să tragă concluzii în cazuri asemănătoare; de exemplu: pentru a afla $\frac{1}{4}$ dintr-un număr, împărțim numărul dat la 4; pentru a afla $\frac{1}{7}$ dintr-un număr, împărțim numărul dat la 7 etc.

Aflarea unei fracții (cu numărătorul diferit de 1) dintr-un întreg

Se abordează, de asemenea, pe baza unor probleme simple, care se rezolvă cu sprijin în obiecte sau desene.

- Întâi se abordează o problemă asemănătoare cu cea de aflare a unei unități fracționare dintr-un întreg, în care întregul este reprezentat printr-o mulțime cu un număr mic de elemente, astfel încât să fie figurată cu ușurință printr-un desen. De exemplu: „Pe platou erau 9 mere. Dana a luat $\frac{2}{3}$ din ele. Câte mere a luat Dana?” [idem].

În acest caz, întregul este reprezentat printr-o mulțime de 9 mere. Fracția $\frac{2}{3}$ ne arată că întregul (cele 9 mere) a fost împărțit în 3 părți egale (fiecare parte a câte 9 : 3 = 3 mere), iar Dana a luat 2 dintre aceste părți (3 × 2 = 6 mere). Putem figura prin următorul desen:



Obținem rezolvarea prin exercițiu:

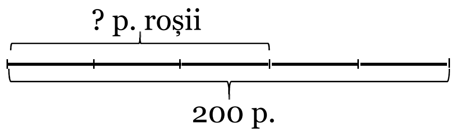
$$\frac{2}{3} \text{ din } 9 = \overset{3}{9:3} \times 2 = 6.$$

Observăm că, pentru a afla $\frac{2}{3}$ dintr-un număr, am împărțit numărul dat la 3, adică la numitorul fracției, apoi am înmulțit rezultatul obținut la 2, adică la numărătorul fracției.

- În continuare se abordează o problemă în care întregul este reprezentat printr-o mulțime cu un număr mare de elemente, astfel încât să nu poată fi figurată cu ușurință prin desen. De exemplu: „Într-o cutie sunt 200 de pixuri. $\frac{3}{5}$ din toate pixurile sunt roșii. Câte pixuri roșii sunt?” [8, p. 74].

În acest caz, întregul este reprezentat printr-o mulțime de 200 de pixuri. Fracția $\frac{3}{5}$ ne arată că întregul (cele 200 de pixuri) a fost împărțit în 5 părți egale (fiecare parte conține câte 200 : 5 = 40 de pixuri), iar pixurile roșii constituie 3 dintre aceste părți (40 × 3 = 120 de pixuri).

Doarece este nerațional să figurăm cele 200 de pixuri așa ca în cazurile precedente (prin figuri separate), vom reprezenta întregul printr-un segment. Știm că va trebui să împărțim acest segment în 5 părți egale, de aceea alegem o lungime potrivită; de exemplu, 10 pătrățele pe rețeaua caietului (sau 5 cm). Obținem următorul desen schematic:



Scriem rezolvarea prin exercițiu:

$$\frac{3}{5} \text{ din } 200 = \overset{40}{200 : 5} \times 3 = 120.$$

Observăm că, pentru a afla $\frac{3}{5}$ dintr-un număr, am împărțit numărul dat la 5, adică la numitorul fracției, apoi am înmulțit rezultatul obținut la 3, adică la numărătorul fracției.

- La final, se citește regula din manual: „Pentru a afla cât reprezintă o fracție dintr-un număr, procedăm astfel: întâi împărțim numărul la numitorul fracției; apoi înmulțim rezultatul obținut cu numărătorul fracției” [8, p. 74].

Atenționăm că în clasa a IV-a nu se recomandă memorarea regulii de aflare a unei fracții din întreg. Pentru a asigura rezolvarea conștientă, se cere rezolvarea comentată, sprijinită printr-o figurare potrivită a enunțului.

Pentru consolidare, în afară de probleme, se propun sarcini de calcul comentat.

<u>Exemplul 1.</u> Calculează și explică: $\frac{4}{7}$ din 280.

Comentăm:	*Scriem:*
Întregul este reprezentat prin numărul 280.	$\frac{4}{7}$ din 280 =
Numitorul fracției $\frac{4}{7}$ arată că întregul a fost împărțit în 7 părți egale. Deci, întâi efectuăm împărțirea 280 : 7 = 40. Numărătorul acestei fracții arată că s-au luat 4 dintre aceste părți.	$= \overset{40}{280 : 7} \times 4 = 160$

Deci, în continuare efectuăm înmulțirea 40 × 4 = 160.	

<u>Exemplul 2.</u> Calculează cât consituie $\frac{9}{100}$ din 1 leu.

Comentăm:	*Scriem:*
Întregul este reprezentat prin suma de 1 leu = 100 bani. Numitorul fracției $\frac{9}{100}$ arată că întregul a fost împărțit în 100 de părți egale. Deci, întâi efectuăm împărțirea 100 bani : 100 = 1 ban. Numărătorul acestei fracții arată că s-au luat 9 din aceste părți. Deci, în continuare efectuăm înmulțirea 1 ban × 9 = 9 bani.	$\frac{9}{100}$ din 1 leu = $= \overset{1\text{ ban}}{100\text{ bani} : 100} \times 9 =$ $= 9$ bani

Pentru dezvoltare, pot fi propuse și sarcini de următorul tip.

<u>Exemplul 3.</u> Scrie ca fracție ce parte din 1 oră constituie: a) 20 min; b) 40 min.

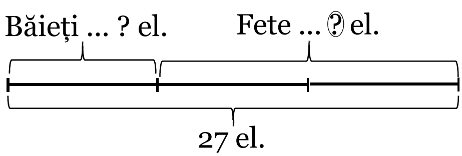
Comentăm:	*Scriem:*
Întregul este reprezentat prin 1 oră = 60 min. a) Observăm că 20 min = 60 min : 3. Deci, 20 min constituie $\frac{1}{3}$ din 1 oră.	20 min = $\frac{1}{3}$ din 1 oră
b) Observăm că 40 min = 20 min × 2.	40 min = $\frac{2}{3}$ din 1 oră
Deci, 40 min constituie $\frac{2}{3}$ din 1 oră.	

Probleme compuse cu fracții

<u>Exemplul 1.</u> Într-o clasă sunt 27 de elevi. Băeţii constituie o treime din toți elevii. Câte fete sunt în clasă?

Organizarea enunțului printr-un desen schematic

În cazul dat, întregul este reprezentat prin mulțimea celor 27 de elevi din clasă. Vom figura întregul printr-un segment. Deoarece fracția *o treime* arată că întregul a fost împărțit în 3 părți egale, alegem o lungime potrivită a segmentului; de exemplu, 12 pătrățele pe rețeaua caietului (sau 6 cm). Obținem următorul desen schematic:



Rezolvare cu plan

Metoda I

1) Câți băieți sunt?

$\frac{1}{3}$ din 27 = 27 : 3 = 9 (el.)

2) Câte fete sunt?

27 – 9 = 18 (el.)

Metoda a II-a

1) Ce parte din toți elevii o constituie fetele?

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

2) Câte fete sunt?

$\frac{2}{3}$ din $27 = 27 : 3 \times 2 = 18$ (el.)

Rezolvarea prin metoda I este destul de accesibilă pentru elevii de clasa a IV-a. Însă la însușirea metodei a II-a, deseori, școlarii întâmpină dificultăți. Una dintre principalele dificultăți constă în discriminarea numerelor naturale, care se obțin răspunzând la întrebarea *Cât/câți/câte?* și a fracțiilor, care se obțin răspunzând la întrebarea *Ce parte/a câta parte?* Respectiv, la rezolvarea problemei de mai sus prin metoda a

II-a, unii elevi pot scrie eronat ca răspuns la prima întrebare „$\frac{2}{3}$ (elevi)” sau pot formula eronat prima întrebare, începând cu „câți” în loc de „ce parte”.

Exemplul 2. La o cantină s-au adus 456 *l* de suc de mere și 265 *l* de suc de struguri. Într-o zi s-a consumat $\frac{3}{7}$ din tot sucul. Cât suc a rămas? [8, p. 77].

Organizarea enunțului în schemă

Observăm că, în cazul problemei date, realizarea unui desen schematic, figurând întregul printr-un segment, va fi mai dificilă, deoarece va trebui să notăm pe segment mai multe diviziuni (și separarea sucului de mere de cel de struguri, și împărțirea întregului în 7 părți egale). În această situație este convenabil de a realiza o schemă clasică pe baza cuvintelor cheie:

S-au adus ... ? *l* (456 și 265)
S-au consumat ... ? *l*, $\frac{3}{7}$ din
Au rămas ... ? *l*

Rezolvare

Metoda I

Rezolvare cu justificări

1) 456 + 265 = 721 (*l*) – s-au adus;

103

2) $\frac{3}{7}$ din 721 = 721 : 7 × 3 = = 309 (*l*) – s-au consumat;

3) 721 – 209 = 412 (*l*) – au rămas.

Metoda a II-a

Rezolvare cu plan

1) Câți litri de suc s-au adus?
456 + 265 = 721 (*l*)

2) Ce parte din tot sucul a rămas?
$1-\frac{3}{7}=\frac{7}{7}-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

3) Câți litri de suc au rămas?
$\frac{4}{7}$ din 721 = 721 : 7 × 4 = = 412 (*l*)

Exemplul 3. Prețul unui calculator este 9 800 lei. Prețul unui televizor constituie $\frac{4}{5}$ din prețul calculatorului. O mașină de spălat costă cât $\frac{3}{8}$ din prețul televizorului. Cât costă mașina de spălat? [8, p. 78].

Organizarea enunțului în schemă

Observăm că, și în cazul problemei date, este convenabil de a realiza o schemă clasică pe baza cuvintelor cheie:

Calculatorul ... 9 800 lei

Televizorul ... ? lei, $\frac{4}{5}$ din

Mașina de spălat ... ? lei, $\frac{3}{8}$ din

Rezolvare cu justificări:

1) $\frac{4}{5}$ din 9 800 = $\overset{1\,960}{9\,800 : 5} \times 4$ = 7 840 (lei) – televizorul;

2) $\frac{3}{8}$ din 7 840 = $\overset{980}{7\,840 : 8} \times 3$ = 2 940 (lei) – mașina de spălat.

Exemplul 4. În trei zile au fost plantați 420 de copaci. În prima zi s-au plantat o treime din toți copacii. În a doua zi s-au plantat jumătate din copacii rămași. Câți copaci au fost plantați în ziua a treia? [idem].

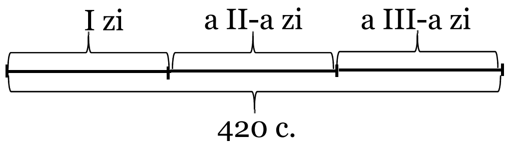
Organizarea enunțului în schemă

Observăm că, în cazul problemei date, realizarea unei scheme clasice pe bază de cuvinte cheie ar fi extrem de dificilă, dar figurarea printr-un desen schematic poate facilita mult rezolvarea problemei.

Figurăm întregul (420 de copaci) printr-un segment cu o lungime potrivită, de exemplu, 6 cm. Fracția *o treime* arată că trebuie să împărțim segmentul în trei părți egale și să marcăm o parte – copacii plantați în I zi.

Rămân două părți egale pentru zilele următoare. Jumătate, adică una din cele două părți egale rămase, s-au plantat în ziua a II-a, iar cealaltă parte – în ziua a III-a.

Astfel, doar realizând desenul, elevii pot ajunge să calculeze răspunsul problemei împărțind 420 : 3 = 140 (c.).



Pentru a se convinge că au gândit corect, elevii pot realiza rezolvarea cu justificări printr-o metodă preferată; de exemplu:

1) 420 : 3 = 140 (c.) – în I zi;
2) 420 – 140 = 280 (c.) – în total în zilele următoare;
3) 280 : 2 = 140 (c.) – în a II-a zi;
4) 280 – 140 = 140 (c.) – în a III-a zi.

ACTIVITĂȚI APLICATIVE

Activități diferențiate în echipe sau perechi

1. Proiectați activități didactice pentru introducerea noțiunii de fracție pe baza modelelor obiectuale, figurative, simbolice și verbale. Simulați activitățile proiectate, repartizându-vă rolurile de învățător și elevi. Realizați evaluarea reciprocă a activităților simulate.

2. Analizați dictarea vizuală propusă în Anexa 2.1. Determinați unitatea de competență vizată. Argumentați respectarea prevederilor MECD pentru activitățile de autoevaluare [3, p. 18].

3. Analizați proba de evaluare formativă în etape, propusă la pagina 73 a manualului de matematică de clasa a IV-a [8] și identificați unitățile de competență evaluate. Elaborați: **a)** varianta a II-a prin clonare; **b)** fișe distributive pentru elevi pe ambele variante; **c)** o prezentare electronică pentru realizarea autoverificării; **d)** o schiță a activității didactice în vederea autocorectării și autoaprecierii de către elevi a rezultatelor obținute; **e)** recomandări succinte privind verificarea și aprecierea lucrărilor elevilor de către învățător.

4. Elaborați un test sumativ la unitatea de învățare „Fracții" în clasa a IV-a, în baza reperelor prezentate în Anexa 2.2.: **a)** completați matricea de specificații; **b)** elaborați itemii pe două variante; **c)** elaborați baremul de corectare și apreciere pe ambele variante; **d)** elaborați un tabel pentru aprecierea prin calificative a rezultatelor elevilor pe bază de punctaj acumulat.

5. Propuneți, pentru studiul fracțiilor în clasa a IV-a, modalități de valorificare: **a)** a poiectelor individuale; **b)** a proiectelor de grup; **c)** a proiectelor STEM/STEAM.

Activități individuale

6. Selectați din manualul de matematică de clasa a IV-a sarcini pentru: **a)** identificarea pe desene, citirea și scrierea fracțiilor; **b)** explorarea modalităților de reprezentare prin desen a fracțiilor; **c)** aflarea unei fracții dintr-un număr; **d)** integrarea achizițiilor referitoare la fracții cu cele referitoare la mărimi și unități de măsură. Prezentați colegilor modele de comentare orală și scriere a rezolvării. Realizați evaluarea reciprocă.

7. Rezolvați problemele: **a)** realizați o schemă figurativă, reprezentând întregul printr-un segment de lungime potrivită; **b)** scrieți rezolvarea cu plan sau cu justificări (cum considerați mai potrivit); **c)** scrieți răspunsul scurt sau deplin al problemei (cum considerați mai potrivit); **d)** propuneți o activitate de postrezolvare relevantă.

1) Într-o bibliotecă sunt 24 352 de cărți. Trei optimi din acestea se află în sala de lectură. Câte cărți sunt în sala de lectură?

2) La o cantina s-au adus 50 kg de făină de grâu și 20 kg de făină de porumb. Într-o săptămână s-au folosit patru cincimi din toată făina. Câte kilograme de făină s-au folosit?

3) Într-o cutie erau 50 de cubulețe. Dan a luat o zecime din toate cubulețele, iar Ana – o cincime din toate cubulețele. Cine a luat mai multe cubulețe și cu cât?

8. Rezolvați problemele prin două metode: **a)** realizați o schemă potrivită; **b)** scrieți rezolvarea cu plan sau cu justificări (cum considerați mai potrivit); **c)** scrieți răspunsul scurt sau deplin al problemei (cum considerați mai potrivit).

1) O carte are 162 de pagini. Radu a citit patru noimi din carte. Câte pagini mai are de citit?

2) Alina a cumpărat un dicționar. I-au rămas trei cincimi din cei 200 de lei pe care îi avea la început. Află prețul dicționarului.

3) La o alimentară s-au adus 40 de pachete a câte 2 kg de orez. S-au vândut trei optimi din aceste pachete. Câte kilograme de orez au rămas?

3. METODOLOGIA PREDĂRII-ÎNVĂŢĂRII-EVALUĂRII ELEMENTELOR DE GEOMETRIE

3.1. Locul şi importanţa studierii elementelor de geometrie în clasele primare

La fel ca mărimile și unitățile de măsură, elementele de geometrie consituie un domeniu de conținut care oferă contexte semnificative de formare a tuturor celor patru competenţe specifice disciplinei Matematică.

Finalitățile studierii elementelor de geometrie sunt definite curricular prin unitățile respective de competenţe si trebuie să asigure baza pentu variate abordări inter- şi transdisciplinare în clasele primare, premisele studierii geometriei şi altor discipline în clasele mai mari, dar şi să răspundă necesităților cotidiene ale micilor școlari. Atingerea acestor finalităţi solicită elevilor formarea-dezvoltarea la nivelul accesibil vârstei a cpacităților:

- *de dobândire a cunoştinţelor despre forme geometrice* asociate cu obiecte ale lumii reale, proprietăţi caracteristice ale acestora, poziţii relative, diverse relaţii implicate;
- *de aplicare a cunoştinţelor de geometrie* în contexte de rezolvare a unor probleme cu un conţinut geometric şi de soluţionare a unor situaţii de problemă ce implică integrarea achiziţiilor geometrice cu cele dobândite în cadrul altor discipline şi în cotidian;
- *de construcție a unor raţionamente specifice geometrice* prin care se urmăreşte înțelegerea necesității acestora, dezvoltarea progresivă a rigurozităţii concomitent cu educarea unor trăsături psihice pozitive (motivaţie şi interes, gust estetic etc.).

Elementele de geometrie comportă pentru micul şcolar *valenţe educaţionale* pronunţate, contribuind la:

- dezvoltarea spiritului de observaţie;
- rafinarea operaţiilor de analiză şi sinteză în baza descoperirii legăturilor dintre proprietăţile figurilor şi detaşarea treptată a relaţiilor speciale în structura figurilor;
- formarea unei conduite rezolutive vizând construcţia unor noi căi de rezolvare a problemelor sau de verificare a adevărurilor geometrice;
- adăugarea unor elemente care pregătesc formarea concepţiei ştiinţifice despre lume; de exemplu, faptul că şcolarul începe să gândească spaţiul înconjurător ca nesfârşit şi înţelege că spaţiul poate fi cercetat pe zone oricât de mici.

Conform curriculumului, în clasele II-IV, *conținuturile de învățare referitoare la elementele de geometrie* sunt integrate cu cele ce vizează unitățile de măsură, constituind unități de învățare „Elemente intuitive de geometrie și măsurări”. Faptul că acestea sunt proiectate pentru finele anilor de învățământ, nu înseamnă că se valorifică doar atunci. Dimpotrivă, e nevoie de o consolidare și dezvoltare sistematică prin repetare continuă și transfer în contexte noi pe tot parcursul anului.

În clasa I nu este evidențiată o unitate de învățare separată pentru elementele de geometrie, dar se prevede un parcurs continuu pe toată perioada anului școlar.

Conţinuturile curriculare de învățare a elementelor de geometrie în clasele primare prevăd următoarele noţiuni:

- *forme geometrice*: forme plane (figuri geometrice) și forme spațiale (corpuri geometrice);
- *figuri geometrice*: punct, linie dreaptă, segment, linie curbă (închisă/deschisă), linie frântă (închisă/deschisă), poligon (triunghi, patrulater (pătrat, dreptunghi)), cerc;

- *corpuri geometrice*: sferă, cub, cuboid, cilindru, con;
- *perimetrul unui poligon*: formulele de calcul pentru perimetrul unui pătrat, unui dreptunghi.

3.2. Cerinţe metodologice generale în studierea elementelor de geometrie

Geometria, ca ştiinţă, a parcurs cale lungă de la primele reguli de calculare a ariilor și volumelor, obținute prin experienţe practice încă în antichitate, până la o structură riguroasă organizată logic ca sistem axiomatic. Pentru a putea înțelege o astfel de construcție logică, este necesar un nivel mult mai avansat de dezoltare a gândirii decât cel specific vârstei școlare mici. Astfel, este clar că un curs de geometrie axiomatic, bazat pe deducție, nu poate fi accesibil elevilor din clasele primare. Deoarece gândirea micilor școlari este concret-intuitivă, iar capacitățile de deducție încep a se dezvolta abia spre vârsta de 9-10 ani, este nevoie de a respecta anumite **cerințe metodologice generale** pentru ca însușirea elementelor de geometrie în clasele primare să devină accesibilă și utilă pentru formarea ulterioară și viața cotidiană:

1. *Învăţarea noţiunilor geometrice prin procese intuitive şi formarea lor iniţială pe calea inductivă*: de la simplu – la compus; de la particular – la general; de la concret (percepere prin văz, pipăit, manipulare) – la figurativ (reprezentare prin desen/modelare) și apoi la abstract (reprezentări generalizate, dematerializate);

2. *Respectarea rigurozităţii geometriei în premisa accesibilităţii vârstei elevilor*: nu poate fi acceptată denaturarea sensului din motivul că nu ar fi accesibil elevilor; gradul de rigurozitate poate fi redus astfel, încât să asigure și corectitudinea geometrică, și accesibilitatea pentru elevi;

3. *Asigurarea funcţionalităţii cunoştinţelor geometrice*: pe de o parte, aceste cunoştinţe trebuie să pună baza formării competenţelor prevăzute curricular, iar pe de altă parte să genereze abilităţi necesare în viaţa cotidiană; de exemplu: orientarea în spaţiul proxim, alegerea celui mai convenabil drum până la o locaţie; efectuarea unor măsurători în scopuri practice etc.

Cerinţele metodologice expuse mai sus sugerează predarea-învăţarea formelor geometrice în bază de *strategii didactice inductiv-deductive şi experienţiale, cu parcurgerea următoarelor etape:*

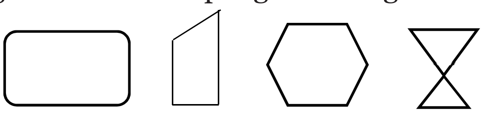
- intuirea obiectelor concrete care pot fi asociate cu forma geometrică respectivă (figura geometrică/corpul geometric), ghidând elevii spre observarea proprietăţilor caracteristice formei respective;
- transferul observărilor pe un material didactic care reprezintă figurativ forma geometrică (observarea unui desen, model);
- transferul observărilor pe desene realizate ghidat;
- formularea la nivel accesibil a unei descrieri explicative a formei geometrice respective şi a propoziţiilor care exprimă proprietăţile ei caracteristice, folosind elemente de limbaj specific geometric;
- recunoașterea formei geometrice pe alte obiecte din mediul înconjurător;
- construirea unor modele, folosind bețioșare și biluțe de plastilină; carton/hârtie și benzi adezive etc.;
- clasificarea formelor geometrice care fac parte din aceeași categorie; de exemplu: patrulatere, poligoane etc.;
- utilizarea în rezolvarea problemelor specifice şi transferul în contexte noi.

După caz, succesiunea acestor etape poate fi abordată deplin sau unele etape pot fi îmbinate între ele; etapele pot fi parcurse într-o singură lecție sau în mai multe.

3.3. Metode şi procedee de formare a raţionamentului specific geometric la elevii de vârstă şcolară mică

Reuşita în atingerea obiectivelor predării-învăţării geometriei în şcoala primară depinde de un complex de factori, printre care *strategiile didactice* au un rol predominant. Pentru inițierea micilor şcolari în construcţia unor raționamente specifice geometrice la un nivel de rigurozitate accesibil vârstei, se evidenţiază strategiile didactice bazate pe *problematizare*, care valorifică produsul şcolar transdisciplinar *PT3. Mesaj argumentativ* în contexte relevante, eventual în combinare cu alte produse transdisciplinare sau specifice disciplinei Matematică, de exemplu: *PT1. Determinarea valorii de adevăr a unei propoziții; PT2. Enunț lacunar (cu numere/cuvinte lipsă)* etc. [3, p. 62].

<u>Exemplul 1 (clasa a IV-a).</u> Care dintre următoarele figuri geometrice sunt poligoane? Argumentaţi [8, p. 80].



- Învăţătorul solicită elevilor să recitească definiţia poligonului din manual şi să evidenţieze în ea trei condiţii pe care trebuie să le satisfacă o figură geometrică pentru ca să fie poligon.

Linia frântă închisă care nu se autointersectează (nu se întretaie pe sine însăşi) se numeşte poligon.

▪ Ca rezultat, se ajunge la următoarea formulare, care se prezintă la ecranul proiectorului, pentru a servi drept suport la elaborarea mesajelor argumentative:

Pentru ca o figură geometrică să fie poligon, ea trebuie să satisfacă următoarele condiții:
1) să fie o linie frântă;
2) să fie o linie frântă închisă;
3) să nu se autointersecteze.

▪ Învățătorul începe activitatea, oferind model de mesaj argumentativ.

— Cercetăm figura 1. Verificăm dacă sunt satisfăcute toate cele trei condiții. Dacă măcar o condiție nu se îndeplinește, figura nu este poligon. Observăm că această figură nu este o linie frântă. Nu este îndeplinită prima condiție. Deci, figura nu este poligon.

▪ Activitatea este continuată de elevi. La necesitate, învățătorul îi ghidează.

— Cercetăm figura 2. Prima condiție se îndeplinește – este o linie frântă. A doua condiție nu se îndeplinește – nu este o linie frântă închisă, dar este o linie frântă deschisă. Deci, figura nu este poligon.

— Cercetăm figura 3. Prima condiție se îndeplinește – este o linie frântă. Și a doua condiție se îndeplinește – este o linie frântă închisă. A treia condiție tot se îndeplinește – linia nu se autointersectează. Toate cele trei condiții sunt satisfăcute. Deci, figura este poligon.

— Cercetăm figura 4. Prima condiție se îndeplinește – este o linie frântă. A doua condiție se îndeplinește – este o linie frântă închisă. Dar a treia condiție nu este satisfăcută – linia se autointersectează. Deci, figura nu este poligon.

Exemplul 2 (clasa a III-a). Adevărat? Fals?

a) Cubul are 6 vârfuri.

b) Cubul și cuboidul au câte 8 fețe.

Corectează propozițiile false [7, p. 111].

Mesaje argumentative

a) Demonstrez pe un model de cub: sunt 4 vârfuri pe fața de sus și 4 vârfuri pe fața opusă, cea de jos. În total, sunt 8 vârfuri. Deci, propoziția este falsă. Aș putea să o corectez astfel:

- Cubul are 8 vârfuri;
- Cubul are 6 fețe.

b) Demonstrez pe model de cub și pe model de cuboid. Ambele au câte 6 fețe sau 3 perechi de fețe: o pereche deasupra și dedesubt; o pereche în față și în spate; o pereche laterale. Deci, propoziția este falsă. Aș putea să o corectez astfel:

- Cubul și cuboidul au câte 6 fețe;
- Cubul și cuboidul au câte 8 vârfuri.

Exemplul 3 (clasa a IV-a). Completează. Ilustrează fiecare propoziție printr-un desen.

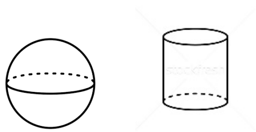
d) ... și ... nu au nici vârfuri, nici muchii, nici fețe.

f) ... are două perechi de laturi de lungimi egale [8, p. 128].

Rezolvare comentată

d) Sfera și cilindrul nu au nici vârfuri, nici muchii, nici fețe.

Desen:



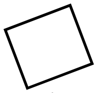
Mesaj argumentativ: Am ales corpuri geometrice, dar nu figuri geometrice, deoarece se vorbește despre muchii și fețe, care sunt elemente ale corpurilor geometrice.

f) Dreptunghiul are două perechi de laturi de lungimi egale.

Desen: 

Mesaj argumentativ: Laturile opuse ale dreptunghiului au lungimi egale. Pe desen acestea sunt: o pereche de laturi orizontale; o pereche de laturi verticale.

<u>Exemplul 4 (clasele I-II).</u> Este adevărată sau falsă afirmația: „Orice pătrat are două laturi orizontale și două laturi verticale”? Alegeți un pătrat din trusa de figuri geometrice și argumentați. Dacă afirmația este falsă, propuneți variante de corectare.

Reprezentare: 

Mesaj argumentativ: Am pus un pătrat pe bancă astfel, încât toate laturile lui sunt oblice. Deci, propoziția dată este falsă. Propun variante de corectare:

- Nu orice pătrat are două laturi orizontale și două laturi verticale;
- Orice pătrat poate fi poziționat astfel, încât să aibă două laturi orizontale și două laturi verticale.

3.4. Metodologia predării-învățării perimetrului unui poligon

Noțiunea de perimetru al unui poligon se introduce în clasa a IV-a prin definiția: „Suma lungimilor laturilor unui poligon se numește perimetrul poligonului (*P*)” [8, p. 82].

Învățătorul trebuie să explice copiilor deosebirea dintre conturul și perimetrul unui poligon. Conturul poate fi demonstrat/arătat, parcurgându-l cu un creion, de exemplu. Iar perimetrul poligonului nu poate fi arătat la fel, deoarece este rezultatul unui calcul – adunării unităților de măsură pentru lungimi. Prin urmare, expresia „în perimetru”, pe care o putem auzi deseori, este eronată.

Inițial, calculul perimetrelor unor poligoane se efectuează pornind de la măsurarea lungimilor laturilor acestora. Apoi, se lucrează pornind de la desene ale unor poligoane, pe care sunt indicate lungimile laturilor.

Este important să-i învățăm pe copii să recunoască situații de viață care necesită calcularea perimetrului unui poligon. De exemplu, perimetrul unui poligon poate fi asociat:

- cu lungimea gardului care înconjoară un teren de forma unui poligon;
- cu lungimea dantelei cusută pe marginile unei fețe de masă de forma unui poligon;
- cu lungimea bordurei care împrejmuiește un strat de flori de forma unui poligon etc.

Următorul pas în formarea noțiunii de perimetru al unui poligon este **descoperirea formulelor pentru calcularea perimetrului unui pătrat și a perimetrului unui dreptunghi** [8, p. 86; 88].

Propunem în continuare descrierea succintă a abordărilor metodologice generale (referitoare și la formula de calcul al perimetrului unui pătrat, și la cea pentru perimetrul unui dreptunghi).

- Pentru formulele de calcul al perimetrului unui pătrat și perimetrului unui dreptunghi se rezervează câte două lecții consecutive: una pentru predarea temei noi și următoarea pentru consolidare și dezvoltare. În continuare, formarea capacității de a aplica aceste formule se bazează pe rezolvarea problemelor.
- La etapa de Evocare a lecțiilor de descoperire a acestor formule, este necesar de a actualiza proprietățile laturilor

poligonului corespunzător și de a introduce notațiile acestora prin litere:

- orice pătrat are patru laturi de lungimi egale; latura pătratului se notează prin litera mică *a;*
- orice dreptunghi are două perechi de laturi de lungimi egale; latura mai lungă se numește lungimea dreptunghiului și se notează prin litera mare *L*, iar latura mai scurtă se numește lățimea dreptunghiului și se notează prin litera mica *l*;
- perimetrul unui poligon se notează cu litera mare *P*.

▪ Descoperirea formulelor de calcul al perimetrului unui pătrat/dreptunghi se bazează pe o strategie inductiv-deductivă, conform etapelor următoare.

1. Se propune o problemă de aflare a perimetrul unui pătrat, știind lungimea laturii/respectiv, a perimetrului unui dreptunghi, știind lungimea și lățimea lui.

2. Perimetrul se calculează în baza definiției perimetrului unui poligon – ca sumă a lungimilor laturilor, iar rezolvarea se scrie prin exercițiu.

3. În exercițiul obținut, valorile numerice se înlocuiesc cu literele respective, ajungând astfel la o scriere literală – o formulă.

4. Scrierile rezolvării (prin exercițiu și prin formulă) se aduc la o formă mai simplă pe baza aplicării proprietăților înmulțirii: pentru perimetrul unui pătrat se folosește semnificația înmulțirii ca adunare repetată, iar pentru perimetrul unui dreptunghi – proprietatea distributivă a înmulţirii în raport cu adunarea. Ca rezultat, se obțin următoarele formule:

- pentru calcului perimetrului unui pătrat:

$$4 \times a = P_{\blacksquare}$$

- pentru calculul perimetrului unui dreptunghi:

$$2 \times (L + l) = P_{\blacksquare} \quad \text{sau} \quad 2 \times L + 2 \times l = P_{\blacksquare}$$

5. Formulele obținute se prezintă verbal ca reguli de calcul:

- pentru a calcula perimetrul unui pătrat, înmulțim cu 4 lungimea laturii pătratului;
- pentru a calcula perimetrul unui dreptunghi, putem proceda în două moduri:
    - dublăm suma lungimii și lățimii;
    - adunăm dublul lungimii cu dublul lățimii.

Concretizăm strategia generală descrisă mai sus în cazul **descoperirii formulei de calcul al perimetrului unui pătrat.**

1. Problemă:

Aflați perimetrul unui pătrat cu latura de 3 cm.

2. Rezolvăm prin exercițiu:

$$3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}.$$

3. Folosim notațiile prin litere:

$$a + a + a + a = P_{\blacksquare}\ .$$

4. Aducem la forma mai simplă exercițiul și scrierea literală.

Observăm că am adunat de 4 ori lungimea laturii păatratului, deci, am înmulțit-o la 4. Astfel, obținem o formă mai simplă pentru:

exercițiu:	scriereă literală:
4×3 cm = 12 cm	$4 \times a = P_{\blacksquare}$

5. Formulăm în cuvinte regula de calcul al perimetrului unui pătrat și generalizăm formula corespunzătoare.

Regula:	Formula:
Pentru a calcula perimetrul unui pătrat, înmulțim cu 4 lungimea laturii pătratului.	$P_{\blacksquare} = 4 \times a$

Concretizăm în mod analog strategia generală descrisă mai sus în cazul **descoperirii formulelor de calcul al perimetrului unui dreptunghi.**

1. Problemă:

Aflați perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 4 cm și lățimea de 3 cm.

2. Rezolvăm prin exercițiu:

$$4 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 14 \text{ cm}.$$

3. Folosim notațiile prin litere:

$$L + l + L + l = P_{\square}$$

4. Aducem la forma mai simplă exercițiul și scrierea literală.

1) Observăm că am adunat de 2 ori suma lungimii și lățimii, deci, am înmulțit cu 2 (am dublat) această sumă. Astfel, obținem o formă mai simplă pentru:

exercițiu:	scriereă literală:
$2 \times (4 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) = 14 \text{ cm}$	$2 \times (L + l) = P_{\square}$

2) Folosind regula înmulțirii unui număr la o sumă, obținem:

exercițiu:	scriereă literală:
$2 \times 4 \text{ cm} + 2 \times 3 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$	$2 \times L + 2 \times l = P_{\square}$

6. Formulăm în cuvinte regulile de calcul al perimetrului unui dreptunghi și generalizăm formulele corespunzătoare.

Regula:	Formulele:
Pentru a calcula perimetrul unui dreptunghi, putem proceda în două moduri:	
▪ dublăm suma lungimii și lățimii;	$P_{\square} = 2 \times (L + l)$
▪ adunăm dublul lungimii cu dublul lățimii.	$P_{\square} = 2 \times L + 2 \times l$

Ulterior, formarea noțiunii de perimetru al unui poligon se realizează în contextul rezolvării problemelor ce solicită aplicarea formulelor de calcul pentru perimetrul unui pătrat, unui dreptunghi.

3.5. Metodologia activităţii de rezolvare a problemelor cu un conţinut geometric

Printre problemele cu un conţinut geometric se evidențiază:

- probleme ce implică desenarea/modelarea unor forme geometrice;
- probleme de recunoaștere a formelor geometrice într-o construcție dată;
- probleme simple și compuse care implică aplicarea formulelor pentru calculul perimetrului unui pătrat, unui dreptunghi.

Probleme ce implică desenul/modelarea unor forme geometrice

Exemplul 1

Lucrați în echipe! Gândiți-vă și reproduceți modelele picilor.

Măriuca: *Am modelat un pâtrat, unind 8 bețișoare de aceeași lungime cu biluțe de plastilină.*

Meșterică: Am modelat un dreptunghi, unind 6 bețișoare de aceeași lungime cu biluțe de plastilină [7, p. 109].

Pentru a realiza modelele, elevii trebuie ghidați, întâi de toate, să-și amintească ceea ce cunosc despre laturile unui pătrat, unui dreptunghi.

- Pătratul are patru laturi de lungimi egale. Măriuca a folosit în total 8 bețișoare de aceeași lungime. Deci, a modelat fiecare latură a pătratului, folosind două bețișoare (8 : 4 = 2).

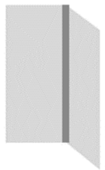
▪ Dreptunghiul are două perechi de laturi opuse de aceeași lungime, adică are două laturi egale mai lungi, care reprezintă lungimea dreptunghiului, și două laturi egale mai scurte, care reprezintă lățimea dreptunghiului. Meșterică a folosit în total 6 bețișoare de aceeași lungime. Prin încercări, stabilim că el a format laturile mai lungi cu 2 bețișoare, iar laturile mai scurte – cu un bețișor.

Exemplul 2

Observă cum modelează picii corpuri geometrice. Ce corp modelează fiecare? Descrie obiectele de care mai are nevoie fiecare pentru a realiza modelul [7, p. 111].

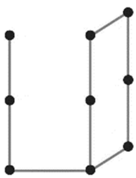
Măriuca și Meșterică: Noi lipim foi de carton cu benzi adezive.

Măriuca

Meșterică 

Brândușa și Poznașu: Noi unim bețișoare cu biluțe de plastilină.

Brândușa 

Poznașu 

Raționamente rezolutive:

a) Modelul Măriucăi

Observând desenul, constatăm că Măriuca modelează un cub. Ea ia o foaie de carton pentru fiecare față și o bandă adezivă pentru fiecare muchie. Un cub are 6 fețe, înseamnă că are nevoie de 6 foi de carton; a folosit deja 2 foi, deci, mai are nevoie de 4. Un cub are 12 muchii, înseamnă că are nevoie de 12 benzi adezive; a folosit deja o bandă, deci mai are nevoie de 11 benzi.

b) Modelul lui Meşterică

Observând desenul, constatăm că Meşterică modelează un cuboid cu 2 fețe pătrate și 4 fețe dreptunghiulare. El a modelat deja 2 fețe laterale, deci, mai are nevoie să modeleze încă 4 fețe: 2 pătrate (jos și sus) și 2 dreptunghiulare. Ştim că un cuboid are 12 muchii. Cu o bandă adezivă a modelat o muchie laterală, deci mai are nevoie de 11 benzi pentru alte 11 muchii: 3 laterale la fel de lungi ca și cea folosită; 8 mai scurte – câte 4 pe fața de jos și pe fața de sus.

c) Modelul Brândușei

Observând desenul, constatăm că Brândușa modelează un cub. Ea ia un bețișor pentru fiecare muchie. Un cub are 12 muchii, înseamnă că are nevoie de 12 bețișoare; ea a folosit deja 5 bețișoare, deci mai are nevoie de 7 bețișoare. Pentru a le uni între ele va folosi biluțe de plastilină – ca vârfuri ale cubului. Cubul are 8 vârfuri, Brândușa a modelat deja 5, deci mai are nevoie de 3 biluțe de plastilină.

d) Modelul lui Poznaşu

Observând desenul, constatăm că Poznașu modelează un cuboid. El modelează muchiile laterale, mai lungi, cu câte 2 bețișoare, iar muchiile de la baze – cu câte un bețișor. El a modelat deja 3 muchii laterale, îi mai trebuie 2 bețișoare pentru cea de a patra muchie laterală. A mai modelat 2 muchii pe fața de jos și îi mai trebuie 2 bețișoare pentru a completa acea față. Pe fața de sus a modelat o muchie și îi mai trebuie încă 3 bețișoare pentru celelalte 3 muchii pe acea față. Deci, în total mai are nevoie de 2 + 2 + 3 = 7 bețișoare. Pentru a uni bețișoarele între ele, folosește biluțe de plastilină – 8 la vârfurile cuboidul și 4 la mijlocul muchiilor laterale, în total 12 biluțe. A folosit deja 9 biluțe, deci mai are nevoie de 3.

Probleme de recunoaștere a formelor geometrice într-o construcție dată

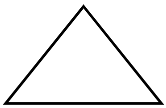
Exemplul 1

Câte patrulatere observați pe desen? [8, p. 91].

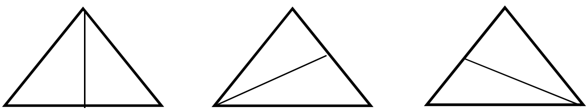
Ca răspuns, se cere demonstrarea tuturor patrulaterelor identificate (pe contur). În total sunt 9 patrulatere, dintre care 5 pătrate și 4 dreptunghiuri.

Exemplul 2

Trasați un segment astfel, încât să obțineți 3 triunghiuri:



Variante posibile de rezolvare:



Problemele ce implică aplicarea formulelor de calcul al perimetrului unui pătrat sau al unui dreptunghi se introduc în ordinea crescătoare a dificultății (percepția subiectivă a problemei de către copii) și a complexității (numărul obiectiv de operații în rezolvarea problemelor).

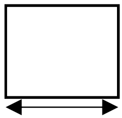
- ***Probleme ce solicită aplicarea formulei pentru calculul perimetrului unui pătrat***

***1.** Probleme rezolvabile prin aplicarea nemijlocită a formulei pentru calculul perimetrului unui pătrat*

<u>Exemplul 1</u>

Calculați perimetrul unui pătrat cu latura de 15 cm.

Desen schematic:



a = 15 cm

Rezolvare:

4 × 15 cm = 60 cm.

***2.** Probleme de aflare a lungimii laturii unui pătrat, știind perimetrul pătratului*

<u>Exemplul 2</u>

Ce lungime are latura unui pătrat cu perimetrul 20 m?

Rezolvare:

20 m : 4 = 5 m.

În contextul rezolvării primei probleme de acest tip, se descoperă formula de calcul al lungimii laturii unui pătrat cu perimetrul dat. Folosind regula de aflare a unui termen necunoscut, din formula de calcul al perimetrului unui pătrat ($P = 4 \times a$) se obține:

Formula:	Regula:
$a = P_{\blacksquare} : 4$	Pentru a afla lungimea laturii unui pătrat, împărțim perimetrul pătratului la 4.

***3.** Probleme de construcție a unui pătrat cu perimetrul dat*

<u>Exemplul 3</u>

Construiți pe rețeaua de pătrățele a caietului de matematică un pătrat cu perimetrul 12 cm.

Pentru a rezolva, elevii află lungimea laturii pătratului (12 cm : 4 = 3 cm), apoi folosesc rigla și construiesc un pătrat cu laturile de 3 cm (2 laturi orizontale și 2 verticale).

4. Probleme simple integrate într-un tabel

Exemplul 4

Calculează și completează tabelul:

Latura pătratului	15 cm		6 dm	
Perimetrul pătratului		92 cm		6 dm

***5.** Probleme care solicită recunoașterea unei situații ce necesită calcularea perimetrului unui pătrat*

Exemplul 5

Dana a aplicat dantelă pe marginile unei batiste de forma unui pătrat cu latura de 2 dm 5 cm. Ce lungime are dantela pe care a folosit-o?

Rezolvare:

1) 2 dm 5 cm = 25 cm;
2) 4 × 25 cm = 100 cm = 1 m.

Exemplul 6

Dana a aplicat dantelă pe marginile unei fețe de măsă de forma unui pătrat cu perimetrul 6 m. Ce lungime are dantela pe care a aplicat-o pe fiecare latură?

Rezolvare:

1) 6 m = 600 cm;
2) 600 cm : 4 = 150 cm = 1 m 50 cm.

Exemplul 7

Pe conturul podelei dintr-o odaie a fost aplicată plintă. Podeaua avea forma unui pătrat cu latura de 3 m. Câtă plintă a trebuit, dacă se știe că la ușă nu s-a aplicat plintă, iar lățimea ușii era de 1 m 20 cm?

Rezolvare:

1) 4 × 3 m = 12 m – perimetrul podelei;

2) 12 m – 1 m 20 cm = 10 m 80 cm – lungimea plintei.

<u>Exemplul 8</u>

Un teren de forma unui pătrat cu latura de 50 m a fost împrejmuit cu plasă metalică fixată pe stâlpi la distanța de 2 metri unul de la altul. Câți stâlpi erau?

Rezolvare:

1) 4 × 50 m = 200 m – perimetrul terenului;
2) 200 : 2 = 100 (stâlpi) – erau.

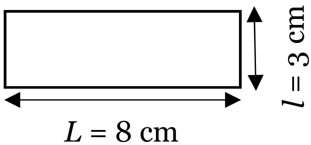
▪ ***Probleme ce solicită aplicarea formulelor pentru calculul perimetrului unui dreptunghi***

1. *Probleme rezolvabile prin aplicarea nemijlocită a formulelor pentru calculul perimetrului unui dreptunghi*

<u>Exemplul 1</u>

Calculați prin două metode perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 8 cm și lățimea de 3 cm.

Desen schematic:



Rezolvare:

Metoda I	Metoda a II-a
2 × (8 cm + 3 cm) = 22 cm	2 × 8 cm + 2 × 3 cm = 22 cm

2. *Probleme în formă tabelară*

<u>Exemplul 2</u>

Calculează și completează tabelul:

L	15 cm	9 dm	6 m
l	8 cm	9 cm	6 dm
P			

3. *Probleme ce implică noțiunea de semiperimetru al unui dreptunghi*

Inițial, se dau două dreptunghiuri – lungimea și lățimea fiecăruia dintre ele. Pentru fiecare dreptunghi se calculează, apoi se compară: suma lungimii și lățimii; semiperimetrul dreptunghiului (jumătate din perimetru). Ca rezultat, se obține [8, p. 90]:

Concluzia:	Formula:
Suma lungimii și lățimii unui dreptunghi este egală cu semiperimetrul dreptunghiului.	$\frac{1}{2}$ din $P_{\text{dr.}} = L + l$

<u>Exemplul 3</u>

Ce lungime și ce lățime ar putea avea un dreptunghi cu perimetrul de 1 m? Propuneți mai multe variante.

Rezolvare:

1) Aflăm semiperimetrul dreptunghiului.
   1 m : 2 = 50 cm

2) Alegem, prin încercări, variante potrivite pentru lungimea și lățimea dreptunghiului, astfel încât suma lor să fie egală cu semiperimetrul dreptunghiului.

L = 40 cm, l = 10 cm;
L = 30 cm, l = 20 cm;
L = 35 cm, l = 15 cm etc.

<u>Exemplul 4</u>

Aflați lățimea dreptunghiului cu perimetrul de 20 cm și lungimea de 8 cm.

Rezolvare:

1) 20 cm : 2 = 10 cm – semiperimetrul dreptunghiului;
2) 10 cm – 8 cm = 2 cm – lățimea dreptunghiului.

Verificare:

2 × (8 cm + 2 cm) = 20 cm - perimetrul dreptunghiului (A).

4. Probleme care solicită recunoașterea unei situații ce necesită calcularea perimetrului unui dreptunghi

Exemplul 5

Doi fermieri vor să împrejmuiască loturile lor de formă dreptunghiulară cu plasă metalică. Loturile au, respectiv, dimensiunile: 2 km și 1 200 m; 3 km și 1 km. Cine a avut nevoie de mai multă plasă metalică? Cu cât?

Rezolvare:

1) Ce lungime a avut plasa folosită de primul fermier?
   2 × (2 000 m + 1 200 m) = 6 400 m
2) Ce lungime a avut plasa folosită de al doilea fermier?
   2 × (3 km + 1 km) = 8 km = 8 000 m
3) Cine a avut nevoie de mai multă plasă metalică și cu cât?
   8 000 m – 6 400 m = 1 600 m = 1 km 600 m

5. Probleme ce implică aplicarea formulelor pentru calculul perimetrelor unor pătrate și unor dreptunghiuri

Exemplul 6

Un dreptunghi cu lungimea de 10 cm și lățimea de 4 cm are același perimetru ca și un pătrat. Află lungimea laturii acelui pătrat.

Rezolvare:

1) 2 × (10 cm + 4 cm) = 28 cm – perimetrul dreptunghiului și al pătratului;
2) 28 cm : 4 = 7 cm – latura pătratului.

Exemplul 7

Aflați lungimea unui dreptunghi dacă lățimea lui este de 4 cm, iar perimetrul său este egal cu perimetrul unui pătrat cu latura de 6 cm.

Rezolvare:

1) 4 × 6 cm = 24 cm – perimetrul pătratului și al dreptunghiului;

2) 24 cm : 2 = 12 cm – semiperimetrul dreptunghiului;

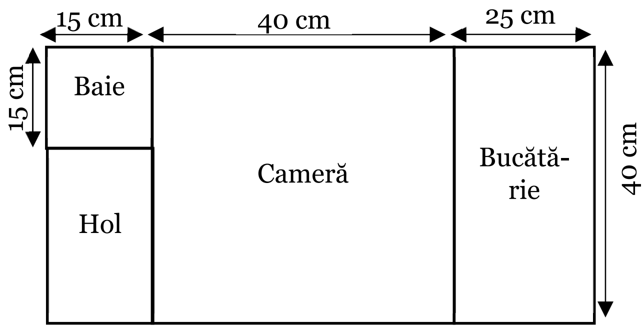
3) 12 cm – 4 cm = 8 cm – lungimea dreptunghiului.

Exemplul 8

Lucrați în perechi!

Observați planul căsuței păpușii.

Pe conturul podelei din fiecare încăpere este aplicat șnur decorativ. Cât șnur s-a folosit pentru: a) baie; b) bucătărie; c) cameră; d) hol? Cât șnur s-a folosit în total? Exprimați rezultatele obținute în alte unități de măsură potrivite [8, p. 103].



Rezolvare:

a) Aflăm cât șnur s-a folosit pentru baie.

Observăm că podeaua băii are forma unui pătrat cu latura de 15 cm. Calculăm perimetrul pătratului:

$$4 \times 15 \text{ cm} = 60 \text{ cm} = 6 \text{ dm}.$$

b) Aflăm cât șnur s-a folosit pentru cameră.

Observăm că podeaua camerei are forma unui pătrat cu latura de 40 cm. Calculăm perimetrul pătratului:

$$4 \times 40 \text{ cm} = 160 \text{ cm} = 16 \text{ dm} = 1 \text{ m } 60 \text{ cm}.$$

c) Aflăm cât șnur s-a folosit pentru bucătărie.

Observăm că podeaua bucătăriei are forma unui dreptunghi cu lungimea de 40 cm și lățimea de 25 cm. Calculăm perimetrul dreptunghiului:

$$2 \times (40 \text{ cm} + 25 \text{ cm}) = 130 \text{ cm} = 13 \text{ dm} = 1 \text{ m } 30 \text{ cm}.$$

d) Aflăm cât șnur s-a folosit pentru hol.

Observăm că podeaua din hol are forma unui dreptunghi cu lățimea de 15 cm și lungimea 40 cm – 15 cm = 25 cm. Calculăm perimetrul dreptunghiului:

$$2 \times (25 \text{ cm} + 15 \text{ cm}) = 80 \text{ cm} = 8 \text{ dm}.$$

e) Aflăm cât șnur s-a folosit în total.

$$60 \text{ cm} + 160 \text{ cm} + 130 \text{ cm} + 80 \text{ cm} = 430 \text{ cm} = 4 \text{ m } 30 \text{ cm}.$$

ACTIVITĂȚI APLICATIVE

Activități diferențiate în echipe sau perechi

1. Elaborați mesaje argumentative ca răspuns la următoarele întrebări: **a)** Ce valențe formative comportă studiul elementelor intuitive de geometrie în formarea școlarului mic? **b)** De ce în clasele II-IV se prevede studiul integrat al elementelor intuitive de geometrie și unităților de măsură?

2. În baza reperelor metodologice expuse în capitolul 3, proiectați activități didactice pentru: **a)** introducerea noțiunii de poligon; **b)** descoperirea formulei de calcul al perimetrului unui pătrat; **c)** descoperirea formulelor de calcul al perimetrului unui dreptunghi. Simulați activitățile proiectate, repartizându-vă rolurile de învățător și elevi. Realizați evaluarea reciprocă a activităților simulate.

3. Vizionați și analizați în baza reperelor metodologice lecția filmată „Figuri și corpuri geometrice” pentru clasa a II-a[1]. Faceți schimb de opinii.

[1] https://educatieonline.md/details?2a2510db58e54e96987a7a5f15a9c9f5

4. Organizați într-un tabel elementele de limbaj specific geometric prevăzute curricular în clasele I-IV. Ce dificultăți pot întâlni elevii la însușirea acestora? Propuneți modalități de prevenire și combatere a dificultăților.

5. Selectați din manualele de matematică pentru clasele I-IV și alte surse de specialitate sarcini pentru dezvoltarea raționamentului specific geometric. Prezentați colegilor modele de comentare orală și scriere a rezolvării. Realizați evaluarea reciprocă.

6. Propuneți, pentru studiul elementelor de geometrie în clasele primare, modalități de valorificare: **a)** a proiectelor individuale; **b)** a proiectelor de grup; **c)** a proiectelor STEM/STEAM.

Activități individuale

7. Selectați din manualele de matematică pentru clasa a IV-a și alte surse de specialitate probleme compuse ce solicită calculul perimetrului unui pătrat, unui dreptunghi. Realizați scrierea model a rezolvărilor. Propuneți activități de postrezolvare relevante.

8. Elaborați un set de sarcini pentru clasa a IV-a, valorificând produsul specific *P16. Completarea șirurilor de forme geometrice* [3, p. 44].

9. Elaborați un portofoliu digital cu imagini și text succint în vederea formării la elevi a competențelor de recunoaștere a formelor geometrice în mediul înconjurător.

4. METODOLOGIA FORMĂRII COMPETENȚELOR DE REZOLVARE ŞI FORMULARE A PROBLEMELOR

4.1. Abordarea didactică a problemelor compuse prin metoda analitică

Amintiți-vă!

▪ ***Etapele de lucru asupra unei probleme compuse:***

1. Citirea și înțelegerea problemei;
2. Organizarea schematică a enunțului (schema problemei);
3. Proiectarea demersului de rezolvare a problemei;
4. Scrierea rezolvării problemei;
5. Verificarea rezolvării problemei;
6. Scrierea răspunsului problemei;
7. Activități de postrezolvare.

▪ În cadrul etapei de proiectare a demersului de rezolvare a problemei, activitatea poate fi ghidată de învățător pe una dintre următoarele căi: ***sintetică*** (de la datele problemei spre întrebarea acesteia), ***analitică*** (de la întrebare spre datele problemei), sau ***analitico-sintetică***. Finalitatea activității la această etapă este întocmirea orală/mintală a unui plan pertinent de rezolvare a problemei.

▪ ***Metoda sintetică*** presupune ghidarea elevilor de la datele problemei spre întrebarea problemei. Se realizează printr-o conversație euristică cu atâția pași, câte operații are rezolvarea problemei. Fiecare pas include întrebări de tipul: *Ce putem afla direct din datele problemei? Prin ce operație vom afla? De ce ați ales această operație?*

▪ ***Metoda analitico-sintetică*** se realizează printr-o conversaţie euristică în care se folosesc întrebări de tipul: *Putem afla ... direct din datele problemei? De ce? Dar aceasta putem afla din datele problemei? Ce operaţie trebuie să efectuăm? De ce?*

Metoda analitică, de asemenea, presupune o conversaţie euristică, se orientează de la întrebare spre datele problemei în 2-3 pași (corespunzător numărului de operații în rezolvarea problemei).

Fie o problemă rezolvabilă prin două operaţii.

Pasul I. *Ce trebuie să știm pentru a răspunde la întrebarea problemei? Daţi-mi două răspunsuri. (Se cere identificarea a două valori.) Avem aceste date în problemă? (Una o avem, alta – nu.)*

Pasul al II-lea. *Să ne gândim la această necunoscută. Avem în problemă datele necesare pentru a o afla? (Se precizează două valori cunoscute.) Deci, avem toate datele pentru a rezolva problema? (Da.)*

Deoarece metoda analitică este mai dificilă pentru școlarii mici, este recomandabil de a realiza o reprezentare schematică concomitent cu conversaţia euristică. Astfel, elevii vor avea un sprijin figurativ, o schemă ce îi va ajuta să răspundă la întrebările învățătorului și să proiecteze demersul de rezolvare a problemei. Această schemă poate fi schițată de către învățător la tablă sau pe slide-urile unei prezentări electronice. Atenţionăm că realizarea schemei pentru metoda analitică este o sarcină a învățătorului, dar nu a elevilor.

În continuare se propune un exemplu concret de aplicare a metodei analitice pentru proiectarea demersului de rezolvare a unei probleme.

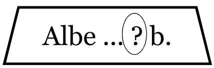
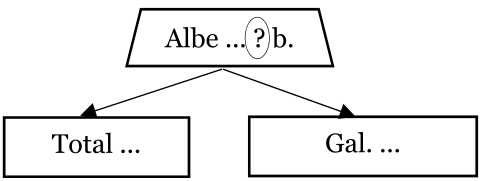
<u>Problemă:</u> „În ajun de Crăciun, o stradă a fost iluminată cu 18 ghirlande a câte 200 de becuri: albe și galbene. Câte becuri erau albe, dacă galbene erau 2 860?” [8, p. 48].

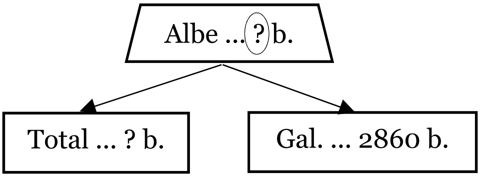
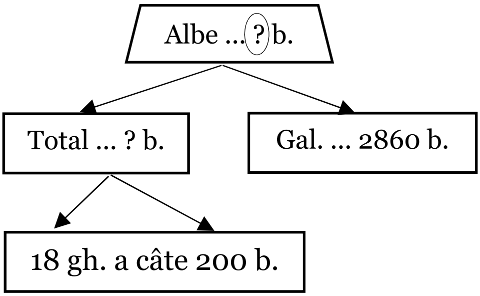
Schema problemei:

Albe ... ? b.

? b. (18 gh. a câte 200 b.)

Galbene ... 2 860 b.

Activitatea învățătorului	Activitatea elevilor
Metoda analitică	
Ce se întreabă în problemă?	Câte becuri albe erau?
Vom proiecta rezolvarea problemei așa cum se proiectează o casă. Vom începe de la acoperiș și vom coborî spre fundament. Apoi vom construi căsuța – de la fundament până la acoperiș. Desenez acoperișul și scriu pe el întrebarea problemei:  Acum voi veți răspunde la întrebări și, împreună, vom schița cărămizile pentru pereți.	
Ce trebuie să știm pentru a răspunde la întrebarea problemei? Dați-mi două răspunsuri.  	Trebuie să știm câte becuri erau în total și câte dintre ele erau galbene.

<table>
<tr><td>Avem aceste date în problemă?

</td><td>Nu avem ambele date. Ştim doar câte becuri galbene erau, dar nu ştim câte becuri erau în total.</td></tr>
<tr><td>Să ne gândim la această necunoscută. Avem în problemă datele necesare pentru a afla câte becuri erau în total? Dați-mi două răspunsuri.

</td><td>Avem: numărul de ghirlande și numărul de becuri în fiecare ghirlandă.</td></tr>
<tr><td>Observați – nu mai avem necunoscute în proiectul nostru, am ajuns la fundamentul căsuței. Acum putem să o ridicăm – să întocmim planul oral al rezolvării.</td><td></td></tr>
<tr><td>Să ridicăm primul etaj. Ce trebuie să aflăm în prima operație? Explicați fără a efectua calcule. (Sub săgețile ce se desprind la „primul etaj” se numerotează operația și se scrie semnul acesteea.)</td><td>Aflăm câte becuri erau în total: înmulțim 18 cu 200.</td></tr>
<tr><td>Să ridicăm al doilea etaj. Ce trebuie să aflăm în a doua operație? Explicați fără a</td><td>În operația a doua aflăm</td></tr>
</table>

efectua calcule. (Sub săgețile ce se desprind la „al doilea etaj” se numerotează operația și se scrie semnul acesteea.)	câte becuri albe erau. Din numărul total de becuri scădem numărul de becuri galbene.
Acum, având planul de rezolvare întocmit, veți putea cu ușurință să scrieți rezolvarea.	

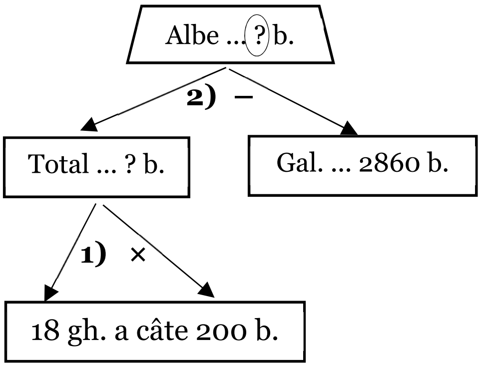


Figura 4.1. Întocmirea planului de rezolvare a problemei, în baza aplicării metodei analitice

După ce elevii își formează priceperi de proiectare a demersului de rezolvare a problemelor în baza metodei analitice, învățătorul ar putea renunța la figurarea schemei-căsuță.

Atenționăm la faptul că ***toate cele trei metode (sintetică, analitică, analitico-sintetică) sunt la fel de importante în formarea elevilor.*** Învățătorul nu trebuie să renunțe la niciuna dintre aceste metode, dar să le aplice sistematic și consecvent, prin alternanță.

Analizați și comparați demersul de aplicare a metodei analitice cu cele propuse mai jos pentru aplicarea metodelor sintetică și analitico-sintetică.

Metoda sintetică	
Ce putem afla direct din datele problemei?	Câte becuri erau în total.
Prin ce operație vom afla câte becuri erau în total?	Vom înmulți 18 la 200 – câte ghirlande erau la câte becuri erau în fiecare ghirlandă.
După ce vom afla câte becuri erau în total, ce vom putea afla în continuare?	Câte becuri albe erau – ceea ce se întreabă în problemă.
Prin ce operație vom afla?	Vom scădea din numărul total de becuri numărul de becuri galbene.
Acum să întocmim planul oral al rezolvării și să notăm în schemă ordinea efectuării operațiilor.	Relatează despre prima, apoi a doua operație.
Metoda analitico-sintetică	
Putem răspunde la întrebarea problemei direct, folosind doar datele din problemă?	Nu putem, deoarece nu cunoaștem câte becuri erau în total.
Dar aceasta putem afla direct din datele problemei?	Putem, trebuie să înmulțim 18 la 200 – câte ghirlande erau

	la câte becuri erau în fiecare ghirlandă.
După ce vom afla câte becuri erau în total, vom putea răspunde la întrebarea problemei?	Da. Pentru aceasta vom scădea din numărul total de becuri numărul de becuri galbene.
Acum să întocmim planul oral al rezolvării și să notăm în schemă ordinea efectuării operațiilor.	Relatează despre prima, apoi a doua operație.

4.2. Formarea competențelor de rezolvare a problemelor cu mărimi proporționale

Fie două mărimi *A* și *B*.

- Dacă, atunci când valoarea lui *A* se mărește de *n* ori, valoarea lui *B* se mărește de același număr de ori, spunem că *A* și *B* sunt mărimi direct proporționale.
- Dacă, atunci când valoarea lui *A* se mărește de *n* ori, valoarea lui B se micșorează de același număr de ori, spunem că *A* și *B* sunt mărimi invers proporționale.

În problemele tipice cu mărimi proporționale se întâlnesc trei mărimi aflate într-o dependentă precum:

- *Cantitate × Preț = Cost;*
- *Timp × Viteză = Distanță;*
- *Timp × Productivitatea muncii = Volumul muncii;*
- *Numărul de saci × Masa fiecărui sac = Masa totală;*
- *Numărul de echipe × Numărul de copii din fiecare echipă = Numărul total de copii etc.*

Problemele simple cu mărimi proporționale reprezintă probleme simple: de aflare a produsului ca sumă de termeni egali; de împărţire prin cuprindere; de împărţire în părţi egale. Pentru facilitarea percepţiei dependenţei dintre mărimi, deseori se propune organizarea tabelară; de exemplu:

	Cantitatea (bucăţi)	Preţul (lei)	Costul (lei)
Baloane	10	20	
Cărţi	5		350
Maşinuţe		100	1 000

În continuare vom precăuta cele trei categorii de probleme compuse tipice cu mărimi proporţionale.

➲ Probleme de aflare a celei de-a patra părţi proporţionale (probleme la regula de trei simplă)

Cu problemele din această categorie copiii se confruntă mai frecvent şi mai devreme decât cu celelalte. Aceste probleme oferă elevilor primele reprezentări despre dependenţa funcţională între mărimi.

În problemele de aflare a celei de-a patra părţi proporţionale se întâlnesc trei mărimi interdependente (cel mai frecvent *Cantitatea* × *Preţul* = *Costul*):

- se dau două valori pentru o mărime;
- pentru o altă mărime se dă o valoare, iar alta trebuie găsită;
- valori ale mărimii a treia nu se dau, dar se precizează că sunt aceleaşi.

Concluzionăm:

Într-o problemă de aflare a celei de-a patra părţi proporţionale se întâlnesc trei mărimi, aflate într-o dependenţă de tipul $X \times Y = Z$, se dau trei valori a două dintre aceste mărimi, se cere a afla valoarea a patra.

Reieşind din aceste caracteristici, se obţin 6 tipuri de probleme de aflare a celei de-a patra părţi proporţionale:

- 4 tipuri de probleme ce relevă dependența direct proporțională (în continuare – exemplele 1-4);
- 2 tipuri de probleme ce relevă dependența invers proporțională (în continuare – exemplele 5-6).

Rezolvarea tuturor acestor 6 tipuri de probleme poate fi realizată prin ***metoda aflării valorii mărimii constante***, care pentru primele două tipuri se mai numește ***metoda reducerii la unitate*** (în continuare – exemplele 1-2).

Rezolvarea prin metoda reducerii la unitate consituie o competență și un conținut de învățare preconizate curricular, ce încep la finele clasei a II-a și se dezvoltă în clasele III-IV. Rezolvarea celorlalte tipuri de probleme de aflare a celei de-a patra părți proporționale prin metoda aflării valorii mărimii constante poate fi abordată în contexte de diferențiere și individualizare.

Dacă valorile numerice permit, atunci problemele de aflare a celei de-a patra părți proporționale admit rezolvare și prin ***metoda aflării raportului (metoda proporțiilor)***, care constituie o competență și un conținut de învățare preconizate curricular în clasa a IV-a.

Rezolvarea prin metoda reducerii la unitate:	Rezolvarea prin metoda proporțiilor:
▪ întâi aflăm ceea ce se consideră în problemă drept unitate (ceea ce nu își schimbă valoarea, are aceeași valoare – unică); ▪ apoi, folosind unitatea găsită, aflăm răspunsul la întrebarea problemei.	▪ întâi aflăm raportul dintre cele două valori date ale uneia dintre mărimi; ▪ apoi, folosind raportul găsit, aflăm răspunsul la întrebarea problemei.

Exemplul 1

4 ghiozdane la acelaşi preţ costă în total 600 de lei. Cât costă 8 ghiozdane de acest fel?

Organizarea datelor:

schema clasică:

1 gh. ... ? lei
4 gh. ... 600 lei
8 gh. ... ? lei

organizare tabelară:

Cantitatea (bucăți)	Prețul (lei)	Costul (lei)
4 8	?, același	600 ?

Rezolvare:

metoda reducerii la unitate[2]

1) Aflăm prețul ghiozdanelor.

600 : 4 = 150 (lei)

2) Aflăm costul a 8 ghiozdane.

8 × 150 = 1 200 (lei)

metoda proporțiilor

1) De câte ori s-a mărit cantitatea de ghiozdane?

8 : 4 = 2 (ori)

2) Cât costă 8 ghiozdane?

2 × 600 = 1 200 (lei)

Raționament rezolutiv pentru metoda proporțiilor:

1) La început erau 4 ghiozdane, apoi 8 – de 2 ori mai multe: 8 : 4 = 2 (ori).

2) De 2 ori mai multe ghiozdane costă de 2 ori mai mult: 2 × 600 = 1 200 (lei).

Exemplul 2

4 ghiozdane la acelaşi preţ costă în total 800 de lei. Câte ghiozdane de acest fel costă la un loc 2 400 lei?

---

[2] În acest caz se realizează *reducere directă la unitate*. Reducerea directă la unitate presupune reducerea la unitate a acelei mărimi, două valori ale căreia sunt date în problemă. În problema dată, se reduce la unitate cantitatea, pentru care sunt date două valori (4 şi 8). Astfel, în cazul dat, reducerea la unitate presupune a afla cât costă o unitate de marfă – prețul.

Organizarea datelor:

schema clasică:

1 gh. ... ? lei

4 gh. ... 800 lei

? gh. ... 2400 lei

organizare tabelară:

Cantitatea (bucăți)	Prețul (lei)	Costul (lei)
4 ?	?, același	800 2 400

Rezolvare:

metoda reducerii la unitate[3]

1) Aflăm prețul ghiozdanelor.

800 : 4 = 200 (lei)

2) Aflăm câte ghiozdane costă 2 400 lei.

2 400 : 200 = 12 (gh.)

metoda proporțiilor

1) De câte ori s-a mărit costul?

2 400 : 800 = 3 (ori)

2) Câte ghiozdane costă 2 400 lei?

3 × 4 = 12 (gh.)

Raționament rezolutiv pentru metoda proporțiilor:

1) La început aveam 800 lei, apoi 2 400 lei, adică de 3 ori mai mulți: 2 400 : 800 = 3 (ori).

2) Cu o sumă de 3 ori mai mare putem cumpăra de 3 ori mai multe ghiozdane: 3 × 4 = 12 (gh.).

<u>Exemplul 3</u>

Câteva ghiozdane la prețul de 200 lei costă 800 lei. Tot atâtea mingi costă în total 400 lei. La ce preț sunt mingile?

Organizarea tabelară a datelor:

	Cantitatea (bucăți)	Prețul (lei)	Costul (lei)
Ghiozdane Mingi	?, aceeași	200 ?	800 400

[3] În acest caz se realizează *reducere inversă la unitate* – reducerea la unitate a acelei mărimi, pentru care în problemă se dă o valoare, iar cealaltă valoare se întreabă. În problema dată, se reduce la unitate cantitatea, pentru care se dă o valoare (4), iar cealaltă valoare se întreabă. Respectiv, se află prețul.

Rezolvare:

metoda afării valorii mărimii constante

1) Aflăm cantitatea de ghiozdane și de mingi.

800 : 200 = 4(bucăți)

2) Aflăm prețul mingilor.

400 : 4 = 100 (lei)

metoda proporțiilor

1) De câte ori s-a micșorat costul?

800 : 400 = 2 (ori)

2) La ce preț sunt mingile?

200 : 2 = 100 (lei)

Raționament rezolutiv pentru metoda proporțiilor:

1) Ghiozdanele costă în total 800 lei, iar mingile –400 lei, adică de 2 ori mai puțin: 800 : 400 = 2 (ori).

2) Dacă mingile costă de 2 ori mai puțin decât același număr de ghiozdane, înseamnă că mingile au prețul de 2 ori mai mic decât ghiozdanele: 200 : 2 = 100 (lei).

<u>Exemplul 4</u>

Câteva ghiozdane la prețul de 200 lei costă 800 lei. Cât costă la un loc tot atâtea mingi la prețul de 100 lei?

Organizarea tabelară a datelor:

	Cantitatea (bucăți)	Prețul (lei)	Costul (lei)
Ghiozdane	?, aceeași	200	800
Mingi		100	?

Rezolvare:

metoda aflării valorii mărimii constante

1) Aflăm cantitatea de ghiozdane și de mingi.

800 : 200 = 4 (bucăți)

2) Aflăm costul mingilor.

4 × 100 = 400 (lei)

metoda proporțiilor

1) De câte ori s-a micșorat prețul?

200 : 100 = 2 (ori)

2) Cât costă mingile?

800 : 2 = 400 (lei)

Raționament rezolutiv pentru metoda proporțiilor:

1) Giozdanele sunt la prețul de 200 lei, iar mingile sunt la prețul de 100 lei, adică de 2 ori mai mic: 200 : 100 = 2 (ori).

2) Deoarece mingile sunt la preț de 2 ori mai mic decât ghiozdanele, înseamnă că, pentru a cumpăra același număr de mingi ca și de ghiozdane, ne vor trebui de 2 ori mai puțini lei: 800 : 2 = 400 (lei).

Exemplul 5

Câte mingi la prețul de 100 lei costă la un loc tot atât cât 4 ghiozdane la prețul de 200 lei?

Organizarea tabelară a datelor:

	Cantitatea (bucăți)	Prețul (lei)	Costul (lei)
Ghiozdane	4	200	?, același
Mingi	?	100	

Rezolvare:

metoda aflării valorii mărimii constante

1) Aflăm costul ghiozdanelor și al mingilor.

4 × 200 = 800 (lei)

2) Aflăm cantitatea de mingi.

800 : 100 = 8 (bucăți)

metoda proporțiilor

1) De câte ori s-a micșorat prețul?

200 : 100 = 2 (ori)

2) Câte mingi sunt?

2 × 4 = 8 (bucăți)

Raționament rezolutiv pentru metoda proporțiilor:

1) Ghiozdanele sunt la prețul de 200 lei, iar mingile la prețul de 100 lei – de 2 ori mai mic: 200 : 100 = 2 (ori).

2) Deoarece mingile se vând la un preț de 2 ori mai mic decât ghiozdanele, cu aceeași sumă pot fi cumpărate de 2 ori mai multe mingi decât ghiozdane: 2 × 4 = 8 (bucăți).

Exemplul 6

4 ghiozdane la prețul de 200 lei costă în total tot atât cât 20 de mingi de același fel. La ce preț sunt mingile?

Organizarea tabelară a datelor:

	Cantitatea (bucăți)	Prețul (lei)	Costul (lei)
Ghiozdane Mingi	4 20	200 ?	?, același

Rezolvare:

metoda aflării valorii mărimii constante	*metoda proporțiilor*
1) Aflăm costul ghiozdanelor și al mingilor. 4 × 200 = 800 (lei) 2) Aflăm prețul mingilor. 800 : 20 = 40 (lei)	1) De câte ori s-a mărit cantitatea de obiecte? 20 : 4 = 5 (ori) 2) La ce preț sunt mingile? 200 : 5 = 40 (lei)

Raționament rezolutiv pentru metoda proporțiilor:

1) La început se vorbește despre cumpărarea a 4 ghiozdane, apoi despre 20 de mingi – de 5 ori mai multe decât ghiozdane: 20 : 4 = 5 (ori).

2) Cu aceeași sumă se cumpără de 5 ori mai multe mingi decât ghiozdane; înseamnă că mingile au un preț de 5 ori mai mic decât ghiozdanele: 200 : 5 = 40 (lei).

Pentru a învăța elevii să aleagă metoda ce mai rațională de rezolvare a problemelor de aflare a celei de-a patra părți proporționale, se recomandă valorificarea principiului confruntării: se propun prin alternanță probleme ce admit două metode de rezolvare și probleme ce admit doar o metodă de rezolvare. De exemplu, completarea unor tabele de următoarea structură [8, p. 47]:

Baloane	Cantitatea (bucăți)	Prețul (lei)	Costul (lei)
	30	același	204
	60		?
	10		?

Globuri de Crăciun	Cantitatea (bucăți)	Prețul (lei)	Costul (lei)
	80	același	1 600
	14		?
	90		?

Elevii trebuie ghidați să observe datele din tabele și să ajungă la următoarele concluzii:

- *cu referire la primul tabel:*

- nu putem aplica metoda reducerii la unitate cu ușurință, deoarece 204 lei nu se împarte exact la 30; avem nevoie să transformăm 204 lei în bani, apoi să împărțim 20 400 : 30;
- în schimb, aplicarea metodei proporțiilor este potrivită și destul de ușor de realizat, deoarece 60 se împarte exact la 30, iar 30 se împarte exact la 10;

- *cu referire la tabelul al doilea*:

- nu putem aplica metoda proporțiilor, deoarece 80 nu se împarte exact la 14;
- în schimb, reducerea la unitate este potrivită și destul de ușor de realizat, deoarece 1 600 se împarte exact la 80.

➲ Probleme de împărțire în părți proporționale

În problemele din această categorie:

- se întâlnesc trei mărimi aflate într-o dependență proporțională (să le notăm *X*, *Y* și *Z*);

- se dau două valori ale unei mărimi (x_1 și x_2 sau y_1 și y_2) și suma a două valori ale celeilalte mărimi (respectiv, $y_1 + y_2$ sau $x_1 + x_2$);
- se cere de aflat valoarea mărimii a treia, care este constantă (Z).

Așadar, în problemele de împărțire în părți proporționale se descriu două sume, una dintre care se dă, iar alta este necunoscută.

Rezolvarea se efectuează prin metoda aflării valorii mărimii constante: aflăm suma necunoscută, apoi împărțim o sumă la cealaltă sumă.

Exemplul 1

La raionul de birotică s-au adus 1 000 de rigle, repartizate în mod egal în cutii. Sunt 23 de cutii cu rigle de lemn și 27 de cutii cu rigle de plastic. Câte rigle sunt în fiecare cutie? [8, p. 34]

Schema problemei:

1 cutie ... ? rigle
? cutii (23 și 27) ... 1 000 rigle

Rezolvare cu justificări:

1) 23 + 27 = 50 (cutii) – în total;
2) 1 000 : 50 = 20 (rigle) – în fiecare cutie.

Exemplul 2

La un loc, Ana și Dan au cumpărat 10 caiete de același fel. Ana a cheltuit 16 lei, iar Dan 24 de lei. La ce preț erau caietele?

Schema problemei:

1 caiet ... ? lei
10 caiete ... ? lei (16 și 24)

Rezolvare cu justificări:

1) 16 + 24 = 40 (lei) – costul total;
2) 40 : 10 = 4 (lei) – prețul.

Exemplul 3

Diana a cumpărat câteva seturi formate dintr-o carte poștală și un mărțișor. Prețul seturilor era 30 de lei. Se știe că toate cărțile poștale au costat la un loc 40 de lei, iar toate mărțișoarele – 80 de lei. Câte seturi a cumpărat Diana?

Schema problemei:

1 set ... 30 lei
? seturi ... ? lei (40 și 80)

Rezolvare cu justificări:

1) 40 + 80 = 120 (lei) – costul total;
2) 120 : 30 = 4 (seturi) – a cumpărat.

Exemplul 4

Marin a cumpărat câteva pixuri la prețul de 2 lei și tot atâtea caiete la prețul de 4 lei. Costul total al cumpărăturii a fost 18 lei. Câte pixuri a cumpărat Marin? Câte caiete?

Schema problemei:

Deoarece numărul de pixuri este egal cu numărul de caiete, putem să ne imaginăm că am format seturi dintr-un pix și un caiet. Numărul de seturi este egal cu numărul de pixuri și cu numărul de caiete.

1 set ... ? lei (2 și 4)
? seturi ... 18 lei

Rezolvare cu justificări:

1) 2 + 4 = 6 (lei) – costul unui set;
2) 18 : 6 = 3 (seturi) – am format.

➲ **Probleme de aflare a unui număr după două diferențe**

În problemele din această categorie:

- se întâlnesc trei mărimi aflate într-o dependență proporțională (să le notăm *X*, *Y* și *Z*);

- se dau două valori ale unei mărimi (x_1 și x_2 sau y_1 și y_2) și diferența a două valori ale celeilalte mărimi (respectiv, diferența valorilor y_1 și y_2 sau x_1 și x_2);
- se cere de aflat valoarea mărimii a treia, care este constantă (Z).

Așadar, în problemele de aflare a unui număr după două diferențe se descriu două diferențe, una dintre care se dă, iar alta este necunoscută.

Rezolvarea se efectuează prin metoda aflării valorii mărimii constante: aflăm diferența necunoscută, apoi împărțim o diferență la cealaltă diferență.

Exemplul 1

În 80 de cutii sunt cu 750 mai puține bomboane decât în 130 de cutii de același fel. Câte bomboane sunt în fiecare cutie? [8, p. 66]

Schema problemei:

1 cutie ... ? b.

? cutii (130 fără 80) ... 750 b.

Rezolvare cu plan:

1) În câte cutii sunt 750 de bomboane?
   130 – 80 = 50 (c.)
2) Câte bomboane sunt în fiecare cutie?
   750 : 50 = 15 (b.)

Exemplul 2

Ana și Dan au cumpărat pixuri la același preț. Ana a cumpărat cu 5 pixuri mai puțin decât Dan. Ea a cheltuit 30 de lei, iar Dan – 45 de lei. La ce preț erau pixurile?

Schema problemei:

1 pix ... ? lei

5 pixuri ... ? lei (45 fără 30)

Rezolvare cu plan:

1) Cât costă 5 pixuri?
   45 – 30 = 15 (lei)
2) La ce preț erau pixurile?
   15 : 5 = 3 (lei)

4.3. Metoda mersului invers. Rezolvarea problemelor

Metoda mersului invers se aplică la rezolvarea problemelor în care se descriu schimbări succesive ale datelor, de exemplu, mărirea sau micşorarea succesivă cu câteva unităţi sau de câteva ori.

La rezolvarea unei probleme prin metoda mersului invers:

- urmărim enunţul în sens invers: de la sfârşit spre început; astfel, inversăm ordinea operaţiilor descrise în problemă;
- efectuăm operaţiile inverse: adunarea ↔ scăderea; înmulţirea ↔ împărţirea.

Aşadar, nu doar ordinea operaţiilor descrise în problemă se inversează, dar şi operaţiile pe care le efectuăm pentru a rezolva sunt inverse celor din enunţul problemei.

Verificarea se face prin substituţie, aplicând numărului obţinut operaţiile descrise în problemă.

<u>Exemplul 1.</u> Ion s-a gândit la un număr natural. L-a micşorat cu 5, a mărit rezultatul de 5 ori, apoi a scăzut 25 din noul rezultat şi a obţinut 200. La ce număr s-a gândit Ion?

- În această problemă sunt descrise schimbări succesive ale datelor. Deci, vom rezolva prin metoda mersului invers.

▪ Pentru a aplica metoda mersului invers, este convenabil să organizăm datele într-o *schemă-lanţ*:

$$\boxed{} \xrightarrow{-\,5} \boxed{} \xrightarrow{\times\,5} \boxed{} \xrightarrow{-\,25} \boxed{200}$$

Prima casetă liberă este rezervată pentru numărul care se întreabă în problemă. Următoarele casete libere sunt rezervate pentru rezultatele intermediare. În ultima casetă se scrie numărul obținut la sfârșit. Deasupra săgeților dintre casete se notează operațiile aritmetice efectuate.

Trebuie de menționat că, pentru a reuși o asemenea organizare schematică a datelor, elevii trebuie să înțeleagă și să poată utiliza terminologia matematică aferentă operațiilor aritmetice învățate. Astfel, în cazul organizării problemei date în schemă-lanţ:

- expresia „l-am micşorat cu 5 unităţi” se notează „– 5”;
- expresia „am mărit rezultatul de 5 ori” se notează „× 5”;
- expresia „am scăzut 25” se notează „– 25”.

▪ Pentru a rezolva, reluăm lanţul de operaţii în sens invers: inversăm atât ordinea operaţiilor, cât şi fiecare operaţie. În acest scop, sub fiecare săgeată trasăm o săgeată în direcție inversă (de la dreapta spre stânga) și notăm sub aceste săgeți operațiile inverse:

$$\boxed{} \underset{+\,5}{\overset{-\,5}{\rightleftarrows}} \boxed{} \underset{:\,5}{\overset{\times\,5}{\rightleftarrows}} \boxed{} \underset{+\,25}{\overset{-\,25}{\rightleftarrows}} \boxed{200}$$

Apoi efectuăm calculele de la dreapta spre stânga și completăm casetele libere:

$$\boxed{50} \underset{+\,5}{\overset{-\,5}{\rightleftarrows}} \boxed{45} \underset{:\,5}{\overset{\times\,5}{\rightleftarrows}} \boxed{225} \underset{+\,25}{\overset{-\,25}{\rightleftarrows}} \boxed{200}$$

Pentru a scoate în evidență activitatea de rezolvare în schema-lanț (săgețile de la dreapta spre stânga; operațiile sub aceste săgeți; numerele obținute în casetele libere), învățătorul poate solicita elevilor să scrie rezolvarea cu un pix cu mina de o altă culoare, de exemplu, verde.

- Pentru verificare, reluăm calculele de la stânga spre dreapta și ne convingem că obținem 200 la final.
- Obținem ca răspuns numărul 50.

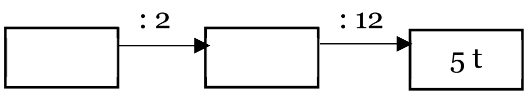
Rezolvarea și verificarea pot fi scrise și pe operații:

Rezolvare:	*Verificare:*
1) $200 + 25 = 225$;	1) $50 - 5 = 45$;
2) $225 : 5 = 45$;	2) $45 \times 5 = 225$;
3) $45 + 5 = 50$.	3) $225 - 25 = 200$.

Totuși, rezolvarea în schemă-lanț este mai accesibilă micilor școlari, oferind prin structura sa un plus de atractivitate cu tentă ludică.

<u>Exemplul 2.</u> Dacă vei micșora de 2 ori masa balenei albastre, vei obține de 12 ori masa elefantului. Știind că elefantul cântărește 5 t, află cât cântărește balena albastră [8, p. 107].

- *Organizarea problemei în schemă-lant*



Pentru a obține această schema-lanț, elevul trebuie să reformuleze problema, pornind de la condiția că rezultatul intermediar este de 12 ori mai mare decât masa elefantului. Adică, împărțind la 12 rezultatul intermediar, se obține masa elefantului (5 t).

- *Rezolvare*

$$\begin{tikzcd} \boxed{120\ t} \arrow[r, shift left, ": 2"] & \boxed{60\ t} \arrow[l, shift left, "\times 2"] \arrow[r, shift left, ": 12"] & \boxed{5\ t} \arrow[l, shift left, "\times 12"] \end{tikzcd}$$

- *Verificare*
  Reluăm lanțul de calcule de la stânga spre dreapta:
  (120 t : 2) : 12 = 5 t (A) sau 120 t : 2 : 12 = 5 t (A)
- *Răspuns:* Masa balenei albastre este 120 t.

4.4. Metoda falsei ipoteze. Rezolvarea problemelor

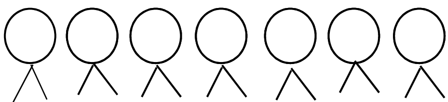
Metoda falsei ipoteze presupune un algoritm original, prin care, pornind intenționat de la o ipoteză falsă, se ajunge la un răspuns adevărat. Problemele rezolvabile prin metoda falsei ipoteze admit rezolvare printr-un sistem de două ecuații liniare, dar iată că această metodă – falsa ipoteză – oferă o cale aritmetică de rezolvare, mai puțin obișnuită, dar curioasă.

<u>Exemplul 1</u>

Câte rațe şi câţi iepuri sunt într-o gospodărie, dacă la un loc aceste animale au 7 capete şi 22 de labe?

Schiță:

Fiecare dintre aceste animale are 1 cap şi cel puţin 2 labe:



→ 7 capete
→ 7 × 2 = 14 labe

Rezolvare:

1) Știm că animalele au în total 22 de labe. Aflăm câte labe nu am luat în calcul realizând schița şi ale cui sunt.

22 – 14 = 8 (labe) – ale iepurilor

2) Știm că am considerat doar 2 dintre cele 4 labe ale fiecărui iepure. Aflăm câte labe ale fiecărui iepure nu am luat în calcul.

$$4 - 2 = 2 \text{ (labe)}$$

3) Așadar, nu am luat în calcul 8 labe, câte 2 la fiecare iepure. Aflăm câţi iepuri sunt.

$$8 : 2 = 4 \text{ (iepuri)}$$

4) Știm că animalele au în total 7 capete.

Aflăm câte rațe sunt.

$$7 - 4 = 3 \text{ (rațe)}$$

Verificare:

1) $4 + 3 = 7$ (capete) – în total (A);

2) $4 \times 4 + 3 \times 2 = 22$ (labe) – în total (A).

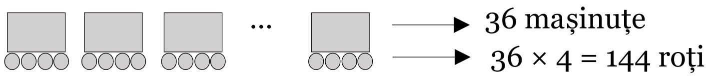
Răspuns: 3 rațe, 4 iepuri.

<u>Exemplul 2</u>

Pe o alee din parc, copiii se plimbă cu mașinuțe a câte 4 roți și cu mașinuțe a câte 6 roți. În total sunt 36 de mașinuțe cu 174 de roti. Câte mașinuțe de fiecare fel sunt?

Schiță:

Fiecare dintre aceste mașinuțe are cel puţin 4 roți:



Rezolvare:

1) Știm că mașinuțele au în total 174 de roți. Aflăm câte roți nu am luat în calcul realizând schița și de la care mașinuțe sunt.

174 – 144 = 30 (roți) – de la mașinuțele mari cu 6 roți

2) Știm că am considerat doar 4 dintre cele 6 roți de la fiecare mașinuță mare. Aflăm câte roti de la fiecare mașinuță mare nu am luat în calcul.

$$6 - 4 = 2 \text{ (roți)}$$

5) Așadar, nu am luat în calcul 30 roți, câte 2 la fiecare mașinuță mare. Aflăm câte mașinuțe mari sunt.

$$30 : 2 = 15 \text{ (mașinuțe)}$$

6) Știm că în total sunt 36 de mașinuțe. Aflăm câte mașinuțe mici sunt.

$$36 - 15 = 21 \text{ (mașinuțe)}$$

Verificare:

1) $21 + 15 = 36$ (mașinuțe) – în total (A);
2) $21 \times 4 + 15 \times 6 = 174$ (roți) – în total (A).

Răspuns: 21 mașinuțe cu 4 roți și 15 mașinuțe cu 6 roți.

În exemplele de mai sus, am reieșit din ipoteza că sunt mai puține labe/roți (prin lipsă), dar este posibilă și o ipoteză prin adaos.

<u>Exemplul 3</u>

Câți purcei și câte curci sunt într-o gospodărie, dacă în total au 33 de capete și 82 de picioare?

Rezolvare:

1) Presupunem că toate aceste animale au câte 4 picioare. Câte picioare ar fi avut animalele, în total, în acest caz?

$$33 \times 4 = 132 \text{ (p.)}$$

2) Știm că în total animalele au 82 de picioare. Aflăm câte picioare am considerat în plus și ale cui sunt.

$$132 - 82 = 50 \text{ (p.) – ale curcilor}$$

3) Știm că am considerat 4 picioare la fiecare curcă, dar, de fapt, curcile au câte 2 picioare. Aflăm câte picioare am considerat în plus la fiecare curcă.

$$4 - 2 = 2 \text{ (p.)}$$

4) Așadar, am considerat în plus 50 de picioare, câte 2 la fiecare curcă. Aflăm câte curci sunt.

$$50 : 2 = 25 \text{ (curci)}$$

7) Știm că animalele au în total 33 de capete.
Aflăm câți purcei sunt.

33 – 25 = 8 (purcei)

Verificare:

3) 8 + 25 = 33 (capete) – în total (A);
4) 8 × 4 + 25 × 2 = 82 (picioare) – în total (A).

4.5. Rezolvarea problemelor de logică și perspicacitate

În sens larg, prin probleme de logică și perspicacitate se înțeleg orice sarcini, pentru rezolvarea cărora nu sunt neapărat necesare cunoştinţe speciale, accentul cade pe raționamentul logic. În sens restrâns, problemele de logică și perspicacitate presupun anumite elemente de surpriză, un specific care nu se încadrează în tiparele obişnuite; de exemplu: o condiție neobişnuită, o idee originală, o soluție neașteptată. Pentru a le rezolva, este important să se descopere esența situației descrise în problemă.

Deși problemele de logică și perspicacitate se abordează, de obicei, ca probleme distractive, totuși, rolul lor în formarea elevilor este unul important: dezvoltarea gândirii, atenției, sferei volitive, a abilităților de a construi raționamente logice, a elabora mesaje argumentative, a-şi susţine opinia etc.

Astfel de probleme nu trebuie neapărat să fie matematice, dar anume educația prin matematică oferă condițiile cele mai propice pentru abordare cu școlarii mici; de exemplu:

- în faza de evocare a lecției de matematică;
- în contexte de diferențiere și individualizare a procesului de formare a competenţelor matematice;
- în cadrul unor proiecte de grup;
- în cadrul disciplinelor opționale aferente matematicii; de exemplu, „Matematică distractivă";

- în procesul de pregătire către concursuri școlare la matematică etc.

Multe dintre problemele de logică și perspicacitate fac deja parte din așa-numitul folclor matematic. În această categorie se includ, de exemplu: probleme-glumă; probleme-ghicitori; probleme-enigme; probleme-rebusuri; pătrate magice; exerciții de calcul matematic, condițiile cărora au o formă amuzantă și solicită o cale originală de raționare ș. a.

În literatura de specialitate se întâlnesc descrieri ale diferitor tipuri de probleme de logică ce pot fi abordate cu elevii din clasele primare.

De exemplu, la Mihaela Neagu și Mioara Mocanu, găsim o posibilă clasificare: probleme în care sunt utilizați operatorii logici *și, sau, nu*; probleme de stabilire a valorii de adevăr a unor afirmații; probleme în care se utilizează relații cauzale; probleme de deducere a unor consecințe ce decurg dintr-un set de ipoteze; probleme care necesită utilizarea raționamentelor logice pentru rezolvarea unor situații practice [12, p. 162-167].

Într-un șir de alte izvoare, în categoria problemelor de perspicacitate rezolvabile cu școlarii mici se includ: probleme de logică, probleme rezolvabile prin încercări, probleme de estimare, probleme de probabilități.

Există și clasificări ale problemelor de logică după metodele posibile de rezolvare, de exemplu: metoda raționamentului; metoda încercărilor (ghicirea; alegerea și verificarea tuturor variantelor posibile); metoda estimărilor; metoda tabelară; metoda grafurilor; metoda cercurilor Euler.

<u>Exemplul 1.</u> Problemă în care sunt utilizați operatorii logici *și, sau, nu*

Lucrați în echipe! Găsiți-l pe cel mai darnic în fiecare caz.

a) Ronț îl servește pe Cronț cu un morcov și o ridiche. Cronț îl servește pe Ronț cu un morcov sau o ridiche.

b) Rița îi oferă lui Relu sau o ghindă, sau o alună, sau o castană. Relu îi oferă Riței o ghindă și o alună sau o castană.

c) Naf-Naf îi dă lui Nif-Nif cel mult 2 mere. Nif-Nif îi dă lui Naf-Naf cel puțin 3 mere [8, p. 10].

Raționamente:

a) Ronț îi oferă lui Cronț 2 legume (un morcov și o ridiche), iar Cronț îi oferă lui Ronț doar una (sau un morcov, sau o ridiche). Deci, Ronț este mai darnic decât Cronț.

b) Rița îi oferă lui Relu 1 fruct (sau o ghindă, sau o alună, sau o castană). Relu îi oferă Riței 2 fructe (o ghindă, apoi o alună sau o castană). Deci, Relu este mai darnic decât Rița.

c) Naf-Naf îi dă lui Nif-Nif cel mult 2 mere, adică 1 sau 2 mere. Nif-Nif îi dă lui Naf-Naf cel puțin 3 mere, adică 3 sau mai multe mere. Deci, Nif-Nif este mai darnic decât Naf-Naf.

Exemplul 2. Problemă de stabilire a valorii de adevăr a unor afirmații

Adevărat sau fals?

1 kg de puf este mai ușor decât 1 kg de mere [6, p. 130].

Raționament:

Kilogramul este unitate standard pentru masa și nu depinde de ceea ce se cântărește. Deci, afirmația este falsă.

Exemplul 3. Problemă de probabilități

Sigur, posibil, imposibil?

Dacă un urcior este mai înalt decât altul, atunci și capacitatea lui este mai mare [ibidem, p. 131].

Raționament:

Este posibil (se poate oferi un exemplu concret de 2 urcioare). Dar nu este sigur. Dacă urciorul mai înalt este mai îngust, atunci capacitatea lui poate să nu fie mai mare (de asemenea, pot fi demonstrate 2 urcioare potrivite).

Exemplul 4. Probleme-ghicitori

Ghicește numărul.

- Sunt un număr hotărât!
  Dacă vrei să-mparți la mine,
  Nu-s de acord și nu permit!
  (Răspuns: numărul 0.)
- Sunt un număr bun și blând.
  Dacă vrei să-mparți la mine
  Ori să mă-nmulțești, vezi bine,
  Nu mă pun în poară, ba!
  Eu nimic nu voi schimba.
  (Răspuns: numărul 1.) [6, p. 144].

Exemplul 5. Probleme-glume

a) Stând într-un picior, cocostârcul cântărește 12 kg. Cât cântărește el stând în două picioare? [7, p. 127].

Răspuns: La fel, 12 kg.

b) Imaginează-ți că ești pilotul unui avion care decolează de pe Aeroportul Chișinău la ora 7:00, face la 8:30 o escală la București și aterizează la Roma la ora 10:45. În avion sunt 85 de locuri. Câți ani are pilotul? [8, p.119].

Răspuns: Vârsta pilotului este vârsta celuia ce rezolvă această problemă.

Exemplul 6. Probleme rezolvabile prin raționament fără a fi necesare calcule

a) Află numele fiecărui copil.

- Fundița Anei nu este roșie. Fundița Danei nu este galbenă. Fundița Mariei nu este nici verde și nici roșie.

- Dan nu stă la mijloc. Nicu stă în stânga lui Dan. Andrei nu stă lângă Dan [5, p. 134].

b) Lucrați în perechi! Întorcându-se de la vânătoare, baronul Münchhausen s-a lăudat valetului: „Rațele împușcate de mine au în total 43 de labe!” Cum puteți dovedi că baronul minte? [7, p. 97]

Raționamente:

a)

- Știm să fundița Mariei nu este nici verde și nici roșie; deci este galbenă. Știm că fundița Anei nu este roșie; deci, este verde. Rămâne culoarea roșie pentru fundița Danei.
- Știm că Dan nu stă la mijloc, deci, stă la margine – sau este primul băiat, sau este al treilea băiat. Știm că Andrei nu stă lângă Dan, deci, și el stă la o margine. Înseamnă că la mijloc stă Nicu. Știm că Nicu stă în stânga lui Dan. Deci, Dan stă la dreapta lui Nicu. Înseamnă că Dan este primul băiat. Astfel, obținem ordinea în care băieții stau pe bancă: Dan, Nicu, Andrei.

b) Fiecare rață are 2 labe, deci, numărul total de labe ar trebui să se împartă exact la 2, adică să fie un număr par. Dar numărul 43 nu este par.

<u>Exemplul 7.</u> Probleme rezolvabile prin raționament, cu efectuare de calcule

a) Miaunică a văzut un șoricel nu departe de o gaură în perete. Motanul leneș chibzuiește: „În 5 salturi pot ajunge la șoarece. Dar nici el nu se va lăsa, va face vreo 20 de salturi și se va ascunde în gaură. Cât eu voi face un salt, șoricelul va face cam 5 salturi.” Ce concluzie a tras Miaunică? [8, p. 105].

Raționament:

Miaunică		Șoricelul
1 salt	...	5 salturi
5 salturi	...	25 salturi > 20 salturi până la gaură

Variantă de răspuns: Miaunică a tras concluzia că mai bine se odihnește în continuare.

Exemplul 8. Probleme rezolvabile prin metoda mersului invers

a) Dacă aș dubla cât am
Și-ncă zece aș aduna,
Aș avea o sută-ntreagă!
Acum tu, copile dragă,
Află câte mere-n ladă
Am ascuns să nu se vadă! [8, p. 111].

Organizarea problemei în schemă-lanț:

$$\boxed{} \xrightarrow{\times 2} \boxed{} \xrightarrow{+10} \boxed{100}$$

Răspuns: 45 de mere.

b) Cine află mai repede numerele ascunse sub figurile geometrice?

▲ – ■ = 962
■ + ● = 100
● : 2 = 30, rest 2 [7, p.89].

Raționament rezolutiv:

Observăm relațiile date în ordine inversă, de jos în sus.

1) Din ultima relație, aflăm:
● = 30 × 2 + 2 = 62.

2) Substituim valoarea cercului în relația a două și aflăm:
■ = 100 – 62 = 38.

3) Substituim valoarea pătratului în prima relație și aflăm:
▲ = 962 + 38 = 1 000.

Exemplul 9. Problemă rezolvabilă prin încercări

Lucrați în perechi!

Rezolvați prin încercări. Găsiți două posibilități.

Miriapodele și urechelnițele s-au adunat la congresul viețuitoarelor cu multe picioare. Miriapodele au câte 40 de picioare, iar urechelnițele au câte 20 de picioare. Câți delegați de fiecare fel pot fi la congres, dacă în total au 600 de picioare? [7, p. 62]

Raționament rezolutiv:

1) Să încercăm varianta cu 10 miriapode, fiecare cu 40 de picioare. În total, aceste miriapode au 400 de picioare. Până la 600, mai rămân 200 de picioare – câte 20 la fiecare urechelniță. Deci, urechelnițe în acest caz erau tot 10.

2) Să încercăm varianta cu 5 miriapode. În total, 5 miriapode au 200 de picioare. Până la 600, mai rămân 400 de picioare – câte 20 la fiecare urechelniță. Deci, urechelnițe în acest caz erau 20.

<u>Exemplul 10.</u> Pătrat magic

Completați cu numere naturale diferite, astfel încât suma numerelor pe fiecare linie, coloană și diagonală să fie 15.

	5	

Soluție:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

<u>Exemplul 11.</u> Careu matematic

Descoperiți în careu 20 de cuvinte – termeni matematici.
Uniți literele fiecărui cuvânt printr-o linie.

A	P	R	O	D	U	S	O	R	P
D	E	S	C	Ă	Z	U	T	A	R
U	T	U	T	E	R	M	E	N	E
N	R	C	I	F	R	Ă	D	U	D
A	E	C	Â	T	E	N	U	M	E
R	I	E	S	R	S	O	B	Ă	C
E	M	S	F	I	T	A	L	R	E
Z	E	O	E	P	O	C	U	B	S
P	A	R	R	L	P	L	U	S	O
I	N	O	T	U	I	M	P	A	R

Soluție:

Adunare, produs, descăzut, sumă, plus, rest, termen, cât, treime, sfert, dublu, triplu, sute, cifră, număr, predecesor, succesor, par, impar, cub.

4.6. Activitatea de formulare a problemelor de matematică de către elevi

Formularea (crearea, alcătuirea, compunerea) problemelor se prevede prin competența specifică nr.4 a disciplinei Matematică în clasele primare: „Realizarea demersurilor explorativ-investigative pentru soluționarea/formularea unor situații de problemă/probleme, manifestând curiozitate și creativitate în integrarea achizițiilor matematice cu cele din alte domenii" [1, p. 53]. Această competență specifică se dezvoltă prin dobândirea treptată a unităților de competențe aferente pe parcursul studierii conținuturilor de învățare curriculare în clasele I-IV, în variate contexte semnificative ce solicită abordări pluri-/inter-/transdisciplinare, inclusiv experiența de viață a elevilor.

Pentru evaluarea competenței de formulare a problemelor, se recomandă produsul școlar „Formularea problemelor", cu criterii de succes specifice fiecăreia dintre clasele I-IV, dar pot fi valorificate în mod creativ și unele produse transdisciplinare, de exemplu: PT2 „Enunț lacunar", PT4 „Completarea tabelelor/schemelor", PT6 „Proiect. Produsul", PT12 „Puzzle" [3, p. 62-63].

Activitățile de dezvoltare a acestei competențe pot fi realizate în cadrul ultimei etape de lucru asupra unei probleme – activități de postrezolvare, sau pot fi abordate ca sarcini separate.

▪ **Ca sarcini de formulare a problemelor în cadrul etapei de activități postrezolutive**, pot fi propuse:

- modificarea întrebării problemei pentru a satisface anumite cerințe indicate, păstrând condiția problemei neschimbată;
- modificarea condiției problemei pentru a satisface anumite cerințe indicate, păstrând întrebarea problemei neschimbată;
- modificarea datelor problemei pentru a satisface anumite cerințe indicate;

- formularea unei probleme analogice (asemănătoare) cu o altă tematică potrivită.

▪ **Ca sarcini separate de formulare a problemelor**, pot fi propuse:

- formularea întrebării problemei pornind de la condiția dată a problemei;
- formularea condiției problemei pornind de la întrebarea dată;
- completarea unui enunț lacunar al problemei cu numere/cuvinte astfel, încât să satisfacă cerințe indicate;
- formularea problemei după schema dată;
- formularea problemei după operațiile de rezolvare;
- formularea problemei după exercițiul de rezolvare;
- formularea problemei după o imagine dată;
- formularea problemei cu o tematică dată.

Vor fi deosebit de utile și contraexemplele didactice – sarcini de identificare și corectare a erorilor comise de un personaj la formularea de probleme [5, p. 131; 6, p. 140].

În strategiile didactice oportune pentru asemenea activități se recomandă valorificarea tuturor formelor de organizare a clasei – frontală, în perechi/echipe, individuală, selectând judicios metode, tehnici și procedee didactice; de exemplu: pentru activitățile frontale – explicația, modelarea, problematizarea, asaltul de idei, explozia stelară; pentru activitățile în perechi/echipe – tehnica Gândește-Perechi/Echipe-Prezintă, tehncica Secvențe contradictorii [2, p. 81-84] ș.a.

<u>Exemplul 1 (clasa I). Contraexemplu didactic</u>

Corectează, apoi rezolvă problema alcătuită de Nătăfleață: „Eu am prins 15 pești. Ion a prins cu 17 pești mai puțin. Câți pești a prins Ion?” [5, p. 96].

Raționament (mesaj argumentativ):

Problema trebuie rezolvată prin scădere (cu 17 pești mai puțin decât 15). Dar nu vom putea efectua această scădere, pentru că 15 < 17. Deci, Nătăfleață a greșit la alegerea datelor (numerelor) din condiția problemei.

Pentru a corecta greșeala lui Nătăfleață, putem propune multe variante; de exemplu:

- să schimbăm cu locul numerele 15 și 17;
- să înlocuim numărul 15 cu orice număr mai mare decât 17;
- să înlocuim numărul 17 cu orice număr de la 1 până la 14;
- să alegem oricare alte două numere potrivite; de exemplu 12 și 9;
- să înlocuim cuvântul „puțin” cu „mult”; atunci rezolvarea se va efectua prin adunare și nu va fi nevoie de schimbat numerele.

<u>Exemplul 2 (clasa a II-a). Problematizare</u>

Ronț are 35 de morcovi, iar Cronț are 5. Ce afli calculând:

a) 35 + 5 = ?; b) 35 – 5 = ?; c) 35 : 5 = ? [6, p. 136]

Raționamente:

a) Elevii trebuie să asocieze adunarea cu totalul de morcovi și să formuleze întrebarea: „Câți morcovi au iepurașii în total (împreună, la un loc)?”

b) În acest caz, elevii trebuie să recunoască o situație de comparare prin scădere și să formuleze întrebări posibile: „Cu cât mai mulți morcovi are Ronț decât Cronț? Cu cât mai puțini morcovi are Cronț decât Ronț?”

c) În acest caz, elevii trebuie să recunoască o situație de comparare prin împărțire și să formuleze întrebări posibile:

„De câte ori mai mulți morcovi are Ronț decât Cronț? De câte ori mai puțini morcovi are Cronț decât Ronț?”

<u>Exemplul 3 (clasa a III-a)</u>

Lucrați în perechi! Creați și rezolvați probleme după informația prezentată.

La o întreprindere de tricotaje, pictorul a creat 4 desene. Fiecare desen a fost imprimat pe 105 maiouri de culoare roșie și pe 120 de maiouri de culoare albastră [7, p. 68].

Raționament posibil:

De fapt, informația data reprezintă condiția problemei. Deci, rămâne să formulăm întrebarea problemei.

Propunem variante potrivite; de exemplu:

- Câte maiouri cu desene imprimate s-au produs?
- Pe câte maiouri au fost imprimate desenele?

Schema problemei:

1 desen ... ? maiouri (105 și 120)
4 desene ... ? maiouri

Rezolvare prin exercițiu:

4 × (105 + 120) = 900 (maiouri).

<u>Exemplul 4 (clasa a IV-a)</u>

Completează enunțul problemei de mai jos cu numere, conform exercițiului de rezolvare:

2 000 lei – (1 340 lei + 285 lei) = ? lei

Mama a cumpărat un costum de ______ lei și o poșetă de _____ lei. Cât i-a rămas din ______lei? [4, p. 16]

Raționament posibil:

Pentru a afla câți lei i-au rămas mamei, trebuie să scădem din câți lei avea – câți lei a cheltuit.

Obervând exercițiul, constatăm că mama avea 2 000 lei. Completăm întrebarea problemei: „Cât i-a rămas din 2 000 lei?”

Știm că mama a cheltuit pentru a cumpăra un costum și o poșetă. Observând exercițiul, constatăm că suma cheltuită este reprezentată prin suma (1 340 lei + 285 lei). Completăm în mod corespunzător condiția problemei: „Mama a cumpărat un costum de 1 340 lei și o poșetă de 285 lei”.

ACTIVITĂȚI APLICATIVE

Activități diferențiate în echipe sau perechi

1. Elaborați mesaje argumentative ca răspuns la următoarele întrebări: **a)** Ce valențe formative comportă rezolvarea problemelor de matematică în formarea școlarului mic? **b)** Prin ce se aseamănă și prin ce se deosebesc metodele de proiectare a demersului de rezolvare a unei probleme compuse: sintetică, analitică și analitico-sintetică? **c)** De ce este important ca învățătorul să aplice sistematic și consecvent toate aceste trei metode? **d)** În ce situații demersul de aplicare a metodelor vizate poate fi restrâns?

2. Analizați scenariile didactice pentru lucrul asupra problemelor compuse prezentate în Anexele 4.1. și 4.2. Determinați metoda folosită: sintetică, analitică sau analitico-sintetică. Completați rubrica „Activitatea elevilor”.

3. Selectați probleme compuse cu operații relativ evidente din manualele de matematică pentru clasele II-IV și elaborați scenarii didactice pentru activitate la clasă, folosind metodele sintetică, analitică și analitico-sintetică. Simulați activitatea în echipă, fiecare membru al echipei jucând rolul de învățător în cadrul unei etape de lucru asupra problemei.

4. Elaborați portofolii care să includă rezolvarea problemelor de logică și perspicacitate, propuse în manualele de matematică pentru clasa: I; a II-a; a III-a; a IV-a. Realizați o expoziție a portofoliilor elaborate. Faceți turul galeriei, exprimați-vă opinii și înaintați propuneri de îmbunătățire.

5. Propuneți modalități de dezvoltare a competențelor de formulare a problemelor în contextul zilelor de activități transdisciplinare.

Activități individuale

6. Determinați categoria din care face parte fiecare problemă și scrieți: schema problemei; rezolvarea prin metodele posibile, cu plan sau cu justificări (cum considerați mai potrivit); răspunsul scurt.

1) Covrigii sunt repartizați în mod egal în pachete. În 50 de pachete sunt în total 10 kg de covrigi. Cât cântăresc 150 de pachete de acest fel?

2) Alina a cumpărat 8, iar Mihai – 2 ilustrate la același preț. La un loc ei au cheltuit 70 de lei. La ce preț se vindeau ilustratele?

3) În 50 de cutii sunt repartizate în mod egal 1 000 de creioane. În câte cutii sunt în total 500 de creioane?

4) Radu a cumpărat 11, iar Doina – 7 trandafiri la același preț. Radu a cheltuit cu 68 de lei mai mult decât Doina. Cât costă un trandafir?

5) Copii s-au repartizat în echipe în mod egal. În 4 echipe sunt la un loc 24 de copii. Câți copii sunt în 5 echipe?

6) 12 pixuri la același preț costă la un loc 42 lei. Cât costă 4 pixuri de acest fel? Câte pixuri de acest fel costă 7 lei?

7) Deplasându-se cu aceeași viteză, un automobil a parcurs 960 km în 8 ore. Ce distanță a parcurs în 2 ore?

8) O întreprindere de confecții coase săptămânal câte 2 800 de cămăși. După instalarea unor mașini de cusut mai performante, norma săptămânală a fost executată în 4 zile. Cu cât a sporit productivitatea muncii?

7. Completați problema astfel încât să admită o singură metodă de rezolvare. Scrieți: schema problemei; rezolvarea cu plan sau cu justificări (cum considerați mai potrivit); rezolvarea prin exercițiu; răspunsul problemei. Proiectați activitatea didactică de planificare a demersului de rezolvare a problemei prin metodele: sintetică, analitică, analitico-sintetică.

1) La o fermă avicolă sunt _____ gâște și _____ curci. Lunar, pentru fiecare gâscă se rezervează ___ kg de porumb, iar pentru fiecare curcă – ___ kg. Ce cantitate de porumb se rezervează lunar pentru toate aceste păsări?

2) ____ caiete la același preț costă la un loc _____ lei. Câte caiete de acest fel costă _____ lei?

3) La confecționarea a 2 rochii identice se folosesc ___m de stofă. Câtă stofă este necesară pentru a confecționa ___ rochii?

8. Completați cu numărul ce lipsește, știind că obiectele respective sunt la același preț. Comentați în scris aplicarea metodei proporțiilor.

1) 12 pixuri costă în total 27 lei.
   4 pixuri costă în total ___ lei.
2) 4 mingi costă la un loc 350 lei.
   8 mingi costă la un loc ____ lei.
3) 4 baloane costă în total 18 lei.
   ___ baloane costă în total 9 lei.
4) 10 creioane costă în total 25 lei.
   ___ creioane costă în total 100 lei.

9. Rezolvați folosind metoda mersului invers.

1) La mărirea cărui număr cu 3 unități se obține un sfert din 80?

2) La dublarea cărui număr se obține cu 42 mai puțin decât 120?

3) Câți călători erau într-un tren, dacă la o stație au coborât jumătate din ei, au urcat 15 și acum sunt 163?

4) Expunerea la soare în amiaza unei zile toride de vară constituie un risc sporit pentru sănătate. Într-o zi, Dan a făcut plajă dimineața, timp de 2 ore și jumătate. Apoi a luat o pauză de 5 ore și s-a reîntors pe plajă pentru o oră și 45 de minute. A plecat de pe plajă seara, la ora 6. La ce oră Dan a venit dimineața la plajă?

5) Într-o zi, un roi de albine sălbatice a invadat un stup în care munceau pașnic 7 530 de albine. În toiul bătăliei, albinele s-au amestecat. 8 650 au dat bir cu fugiții și în stup au rămas 8 000 de albine. Câte albine erau în roiul sălbatic?

6) Ce numere se ascund sub figurile geometrice?

a) ● + ● × ● = ■
■ × ■ = ▲
▲ + ▲ = 800

b) ● + ■ + ▲ = 2 520
● = ■ + ■ + ■
▲ = ■ + ■

c) $\frac{1}{5}$ din ● = ■
$\frac{3}{4}$ din ▲ = ●
$\frac{3}{4}$ din ▲ = 60

d) ● × ■ × ▲ = 1 000
■ + 40 = ●
● × ▲ = 100

10. Rezolvați prin metoda falsei ipoteze [8, p. 119].

1) Colo-n vale, lângă lac,
Se aude: „Ham!”, „Mac-mac!”.
Tropăiesc pe o cărare
34 de picioare
Și-ncă 14 cozi
Se ascund pe după bozi.

2) Câte muște și câți țânțari au la un loc 25 de capete și 78 de aripi? Informație: Musca are o singură pereche de aripi, iar țânțarul are două perechi de aripi.

3) La un magazin se vând biciclete și triciclete. În total, sunt 35 de ghidoane și 80 de roți. Câte biciclete și câte triciclete sunt?

4) La o alimentară sunt puse în vânzare pachete a câte 10 biscuiți cu nucă și pachete a câte 20 de biscuiți cu mac. În total sunt 60 de pachete și 1 000 de biscuiți. Câte pachete de fiecare fel sunt?

5) În ajunul unui nou an școlar, Dan a cumpărat caiete de două feluri, cu 12 foi și cu 24 de foi. În total erau 10 caiete cu 144 de foi. Câte caiete de fiecare fel a cumpărat Dan?

BIBLIOGRAFIE

Cadrul normativ:

1. *Curriculum Național. Învățământul primar*. Chișinău: Lyceum, 2018. ISBN 978-9975-3258-0-6
2. *Ghid de implementare a curriculumului pentru învățământul primar*. Chișinău: Lyceum, 2018. ISBN 978-9975-3263-8-4
3. *Evaluarea criterială prin descriptori în învățământul primar, clasele I-IV*. Chișinău: S.n. 2019 (Tipgr. „Print-caro"). ISBN 978-9975-56-709-1
4. *Programa pentru testarea națională îm învățământul primar la Matematică*, aprobată prin Ordinul MECC nr. 1689 din 23.12.2019

Manuale școlare și ghiduri, aprobate de MEC

5. URSU, L.; LUPU, I.; IASINSCHI, Iu. *Matematică. Manual pentru clasa I*. Chișinău: Prut Internațional, 2021. ISBN 978-9975-54-587-7
6. URSU, L.; LUPU, I.; IASINSCHI, Iu. *Matematică. Manual pentru clasa a II-a*. Chișinău: Prut Internațional, 2021. ISBN 978-9975-54-590-7
7. URSU, L.; LUPU, I.; IASINSCHI, Iu. *Matematică. Manual pentru clasa a III-a*. Chișinău: Prut Internațional, 2020. ISBN 978-9975-54-485-6
8. URSU, L.; LUPU, I.; IASINSCHI, Iu. *Matematică. Manual pentru clasa a IV-a*. Chișinău: Prut Internațional, 2020. ISBN 978-9975-54-492-4
9. URSU, L.; LUPU, I.; IASINSCHI, Iu. *Matematică, clasa I. Ghid de implementare a manualului*. Chișinău: Prut Internațional, 2021. ISBN 978-9975-54-593-8
10. URSU, L.; LUPU, I.; IASINSCHI, Iu. *Matematică, clasa a II-a. Ghid de implementare a manualului*. Chișinău: Prut Internațional, 2021. ISBN 978-9975-54-597-7

Literatură de specialitate

11. DASCĂLU, Gh.; RADU, H.; TĂGÎRȚĂ, V. et. al. *Metodica predării matematicii la clasele I-IV. Manual pentru şcolile normale*. Chișinău: Lumina, 1994. ISBN 5-372-01578-0
12. NEAGU, M.; MOCANU, M. *Metodica predării matematicii în ciclul primar*. Iași: Polirom, 2007. ISBN 978-973-46-0638-2
13. PETROVICI C. *Didactica matematicii pentru învățământul primar*. Iași: Polirom, 2014. ISBN 978-973-46-4480-3
14. URSU, L.; CÎRLAN, L.. *Strategii didactice interactive în învățământul matematic primar*. Chişinău: UPS „Ion Creangă", 2008. ISBN 978-9975-901-02-4
15. URSU, L.; CECOI, V. *Metodica predării matematicii și Științelor în clasele primare*. Chișinău; UPS „Ion Creangă", 2003. ISBN 9975-921-58-2

Anexa 1.1.

Probă de evaluare formativă punctuală

- Clasa: *a II-a*
- Unitatea de învățare: *Elemente intuitive de geometrie și măsurări*
- Unitatea de competență evaluată: *4.3. Exprimarea și compararea rezultatelor unor măsurători în unități de măsură standard: pentru lungime; pentru masă; pentru capacitate; pentru timp; monetare.*

  Produsul școlar evaluat: *PT2. Enunț lacunar (cu numere/cuvinte lipsă)*

  Criterii de succes: *1. Citesc cu atenție enunțul; 2. Determin după cerințe fiecare număr/cuvânt ce lipsește; 3. Completez enunțul.*

Varianta I

1. Completează cu unități de măsură potrivite.
   a) Într-o găleată încap 10 ____ de apă.
   b) Într-un borcan încap 3 ____ de zahăr.
   c) Un pahar are adâncimea de 8 ____ .
   d) Tulpina unui copac are grosimea de 3 ___.
   e) Prețul unui caiet este 2 _____ și 50 ______.
   f) O pauză între lecții durează 10 _______.
   g) O vacanță a durat timp de o ____________.
2. Completează cu semnul de comparație corespunzător.

1 cm ____ 1 m	60 min ____ 1 oră
1 dm ____ 1 cm	12 ore ____ 1 zi

Anexa 1.2.

Transformări ale unităților de măsură

1. Fișe diferențiate/individualizate

Algoritm bazat pe înțelegerea semnificației expresiei
„de *n* ori mai mare/mai mic”

Fișă de sprijin	Fișă de ghidare
4 200 cm = ? m	**420 dm = ? cm**
1. *Comparăm 1 cm cu 1 m:* 1 cm este de 100 ori mai mic decât 1 m.	**1.** *Comparăm 1 dm cu 1 cm:* 1 dm este de ____ ori mai ____ decât 1 cm.
2. *Alegem operația aritmetică: înmulțirea sau împărțirea la 100.* „De 100 ori mai mic” înseamnă că vom efectua ______________ la 100.	**2.** *Alegem operația aritmetică: înmulțirea sau împărțirea la* ___. „De ___ ori mai mare” înseamnă că vom efectua _____________ la ____.
3. *Calculăm:* 4 200 ___ 100 = ________.	**3.** *Calculăm:* 420 ________ = ________.
4. *Scriem răspunsul:* 4 200 cm = ________ m	**4.** *Scriem răspunsul:* 420 dm = ________ cm

Anexa 1.2. (continuare)

2. Fişe diferenţiate/individualizate

Algoritm în baza rezolvării unei probleme simple de aflare a produsului sau de împărţire prin cuprindere

<table>
<tr><th>Fişă de sprijin</th><th>Fişă de ghidare</th></tr>
<tr><td>4 200 cm = ? m

1. Ştim că ____ cm = 1 m.

2. Deci, pentru a afla câţi metri se conţin în 4 200 cm, trebuie să aflăm de câte ori a câte _____ se cuprind în numărul 4 200.
3. Efectuăm operaţia de î_________re.

4. Calculăm:
4 200 _ _____ = ____

5. Scriem răspunsul.
4 200 cm = ____ m</td><td>420 dm = ? cm

1. Ştim că 1 dm = ____ cm.

2. Deci, 420 dm vor conţine de ________________cm decât 1 dm.

3. Eefectuăm operaţia de
_______________.

4. Calculăm:

5. Scriem răspunsul:</td></tr>
</table>

Anexa 2.1.

Dictare vizuală

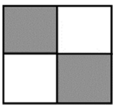
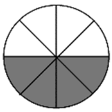
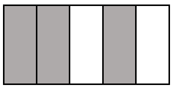
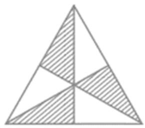
Clasa a IV-a

Unitatea de învățare: *Fracții*

Instructaj

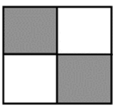
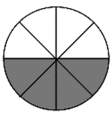
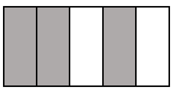
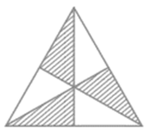
- Voi prezenta desene la ecranul proiectorului.
- Observați-le cu atenție și scrieți cu cifre fracțiile corespunzătoare părților colorate.
- Fracțiile să le scrieți în rând, despărțindu-le prin virgule.
- Lucrăm în liniște. Cine finalizează ridică mâna și așteaptă în liniște să finalizeze și ceilalți colegi.

Slide pentru realizarea sarcinilor:

Autoverificare

- Se prezintă slide-ul pentru autoverificare:

			
$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$

- Elevii confruntă răspunsurile obținute cu cele prezentate la ecranul proiectorului.

Anexa 2.1. (continuare)

- Subliniază/încercuiesc cu verde fiecare răspuns corect.
- Meditează asupra răspunsurilor greșite.

Autocorectare

- Pe rând, în fața clasei se invită 4 elevi pentru a argumenta după modelul:

Sunt colorate 2
din
cele 4 părți egale
în care este împărțit întregul.

$$\frac{2}{4}$$

Citim fracția: două pătrimi.
2 este numărătorul fracției, iar 4 este numitorul fracției.

Autoapreciere

Vă rog să reflectați și să scrieți pe câmp:

+ dacă ați obținut rezultatele corecte în mod independent;

! dacă ați comis careva greșeli, dar acum, după ce am explicat împreună, totul vă este clar;

? dacă și acum mai aveți neclarități.

Anexa 2.2.

Repere pentru elaborarea unui test sumativ la unitatea de învățare „Fracții”, clasa a IV-a

1. Matricea de specificații

Domenii cognitive	Nr. item: Unitatea de competență evaluată	Nr. de puncte (% din punctajul total)
Cunoaștere și înțelegere	1: 2:	
Aplicare	3: 4:	
Integrare	5:	

2. Itemii

Nr. item	Itemii	Schema de acordare a punctajului
1.	Încercuiește literele corespunzătoare desenelor pe care este reprezentată fracția _____.	
2.	Citește cu atenție fiecare propoziție. Dacă o consideri adevărată, încercuiește litera A. Dacă o consideri falsă, încercuiește litera F. ▪ Fracția ___ are numitorul ___. A F ▪ Fracția ___ are numărătorul ___. A F	
3.	Reprezintă fracția____, luând drept întreg un segment cu lugimea de _____ .	
4.	Calculează:	
5.	Rezolvă problema cu plan:	

3. Baremul de corectare și apreciere

Nr. item	Punctaj maxim	Răspuns corect		Acordarea punctajului	Observații
		Var. 1	Var. 2		

Anexa 4.1.

Scenariu didactic al activității de lucru asupra unei probleme compuse, clasa a II-a

Problema: Dan a cumpărat o carte la prețul de 48 de lei și un penar la prețul de 12 lei. Ce rest a primit din 70 lei? [6, p. 41]

Activitatea învățătorului	Activitatea elevilor
1. Citirea și înțelegerea enunțului problemei	
Rog un elev să citească problema, iar ceilalți să urmărească după manual.	
Rog elevii să recitească problema în șoaptă și să se gândească care este condiția problemei și care este întrebarea problemei.	
Rog doi elevi să recitească în pereche problema: primul citește doar condiția, celălalt – doar întrebarea problemei.	
Despre cine se vorbește în problemă?	
Să ne imaginăm că avem un binoclu magic și putem vedea departe-departe, unde ne dorim. Punem binoclurile la ochi și privim la Dan. Lăsăm binoclurile la o parte și povestim ce am văzut prin ele. Eu încep, iar voi continuați în cor.	

Anexa 4.1. (continuare)

La început, când s-a pornit la magazin, Dan o sumă de lei ... Apoi a făcut cumpărături și, pentru aceasta, o parte din bani el a ... Și la sfârșit, lui Dan niște lei i-au ...	
Deci, care sunt cuvintele cheie ale problemei?	
2. Organizarea enunțului în schemă	
Scriem cuvintele cheie în coloniță. Lăsăm o pătrățică de la cel mai lung cuvânt și scriem trei puncte în pătrățica următoare. La același nivel scriem trei puncte în drept cu celelalte cuvinte cheie.	
Acum răspundem la întrebări și completăm rândurile schemei. Știm câți lei Dan <u>avea?</u> Știm câți lei Dan <u>a cheltuit?</u> Știm câți lei lui Dan <u>i-au rămas?</u> Observați că în schemă am obținut 2 semne de întrebare. Pe care îl vom încercui?	
La tablă și în caiete de obține schema:	

Anexa 4.1. (continuare)

3. Proiectarea planului de rezolvare a problemei	
Pentru a afla restul, ce trebuie să cunoaștem? Dați-mi două răspunsuri.	
Avem ambele aceste date în problemă?	
Dar pentru a afla câți lei a cheltuit Dan, ce trebuie să cunoaștem? Dați-mi două răspunsuri.	
Avem ambele aceste date în problemă?	
Deci, avem toate datele necesare pentru a rezolva problema. Haideți să întocmim planul oral de rezolvare a problemei. În prima operație vom afla ... Pentru aceasta ... În operația a doua vom afla ... Pentru aceasta ...	
4. Scrierea rezolvării problemei	
Acum, după ce am întocmit planul de rezolvare a problemei, vom putea cu ușurință să o rezolvăm. Lucrăm independent: un elev – la tablă, ceilalți în caiete. Scriem rezolvarea cu justificări.	
La tablă și în caiete se obține rezolvarea:	

Anexa 4.1. (continuare)

5. Scrierea răspunsului problemei	
Ce trebuie să facem pentru a formula răspunsul problemei?	
Rog un elev să recitească întrebarea problemei și să dea răspunsul deplin. Rog un alt elev să dicteze răspunsul scurt.	
6. Activități de postrezolvare	
Vă provoc să fiți isteți, să vă gândiți bine și să răspundeți la câteva întrebări. În ce bancnote sau monede a putut primi rest Dan? Propuneți mai multe variante. Dacă Dan ar fi cheltuit mai mult, atunci ar fi primit un rest mai mare sau mai mic? Dar dacă ar fi cheltuit mai puțin?	

Anexa 4.2.

Scenariu didactic al activității de lucru asupra unei probleme compuse, clasa a IV-a

Problema: Ana a cumpărat 6, iar Maria – 4 pixuri la același preț. Fetele au cheltuit împreună 60 de lei. Cât costă un pix? [8, p. 30]

Activitatea învățătorului	Activitatea elevilor
1. Citirea și înțelegerea enunțului problemei	
Rog un elev să citească problema, iar ceilalți să urmărească după manual.	
Rog elevii să recitească problema în șoaptă și să se gândească care este condiția problemei și care este întrebarea problemei.	
Rog doi elevi să recitească în pereche problema: primul citește doar condiția, celălalt – doar întrebarea problemei.	
Despre ce se vorbește în problemă? Răspundeți printr-un cuvânt. Despre ...	
Cum erau toate pixurile? Ce se spune despre aceasta în problemă?	
Ce înseamnă „la același preț”? Răspundeți începând de la cuvântul „fiecare”.	
Știm cât costă fiecare pix?	
2. Organizarea enunțului în schemă	

Anexa 4.2. (continuare)

Acum putem scrie primul rând din schemă. Rog un elev să dicteze.	
Scriem pixuri sub pixuri, lei sub lei. Știm câte pixuri s-au cumpărat? Dar ce știm? Rog un elev să dicteze al doilea rând din schemă.	
La tablă și în caiete se obține schema:	
3. Proiectarea planului de rezolvare a problemei	
Obervați cu atenție schema. Ce putem afla direct din datele problemei? Ce operație vom efectua pentru aceasta?	
Când vom calcula câte pixuri au cumpărat fetele în total, ce vom putea afla în continuare? Prin ce operație vom afla? Explicați în cuvinte.	
Acum să întocmim planul oral de rezolvare a problemei. Rog un elev să relateze despre prima operație, un alt elev – despre a doua operație.	
4. Scrierea rezolvării și a răspunsului problemei	

Anexa 4.2. (continuare)

<table>
<tr><td>Scriem rezolvarea cu plan, eu – la tablă, voi – în caiete. Elevii doritori vor dicta ceea ce scriem. Cine nu este de acord cu cele dictate de colegi, ridică mâna și își spune opinia.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">La tablă și în caiete se obține:</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Activități de postrezolvare</td></tr>
<tr><td>Acum să scriem rezolvarea printr-un exercițiu. Pornim de la ultima operație.
Numărul 60 era dat în problemă?
Înseamnă că îl coborâm în exercițiu. Coborâm și semnul împărțirii.
Numărul 10 era dat în problemă? Unde și cum l-am obținut? Cum scriem aceasta în exercițiu?
Coborâm semnul „=” și rezultatul.</td><td></td></tr>
<tr><td>Vă provoc să vă gândiți, putem omite parantezele în exercițiul obținut? De ce?</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">La tablă și în caiete se obține:</td></tr>
<tr><td>Acum vă propun să citim exercițiul obținut folosind terminologia matematică. Propuneți variante diferite.</td><td></td></tr>
</table>

Ludmila URSU

DIDACTICA MATEMATICII II
Suport de curs

Design copertă: Evghenii Semenţov.
Procesare computerizată: Evghenii Semenţov.

Format: 64x90/16. Tipar digital.
Garnitura: Georgia.
Coli de tipar: 8,125.
Tirajul 200 ex. Comanda 52578.

S.R.L. «Tipografia din Bălţi»
MD-3100 Republica Moldova, or. Bălţi, str. 31 August, 22